رئوس مطالب　　　مدار (۲)　　　استاد زاری

۱ـ عناصر تزویج (سلف‌های تزویج شده)　　　۲ـ ترانس‌ها و قضیه تلگان

۳ـ تجزیه و تحلیل گره و مش　　　۴ـ تجزیه و تحلیل حلقه و کات ست

۵ـ معادلات حالت　　　۶ـ فرکانس‌های طبیعی

۷ـ پاسخ فرکانسی　　　۸ـ قضایای شبکه

۹ـ توابع شبکه　　　۱۰ـ دوقطبی‌ها

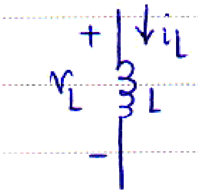
مراجع: ۱ـ نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها　　　ارنست کو
۲ـ تحلیل مهندسی مدار　　　ویلیام هیت

امتحان میان‌ترم　　　هفته اول اردیبهشت　　　۵ـ۳ نمره　　　شنبه
۸۷/۲/۱۴

تکالیف و کار کلاسی　۲ نمره

## سلف‌های تزویج شده :

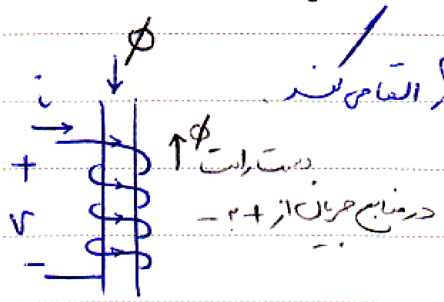
در مدارهای الکتریکی (۱) با سلف آشنا شدیم.




$$v_L = \frac{d(i_L)}{dt} = L\frac{di_L}{dt} + i_L\frac{dL}{dt}$$

در سلف‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان $\frac{dL}{dt} = 0$ ⇐ $v_L = L\frac{di_L}{dt}$

در واقع اگر شار متغیر با زمان $\phi(t)$، سیم‌پیچی را در بر بگیرد در آن ولتاژ القا می‌کند.



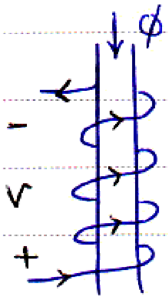

سیم‌پیچ شکل که هسته با مقدار L ها را می‌دهد.

این سیم‌پیچ یک سلف L های را شکل می‌دهد بنابراین سلف به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lambda = Li$$

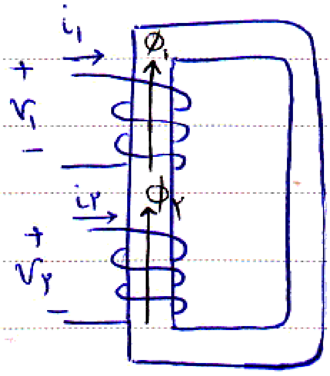
ولتاژ القایی دو سر سلف عبارت است از : $v = \frac{d\lambda}{dt}$ ⇐ $v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L\frac{di}{dt}$

لنز: ولتاژ القایی براساس قانون لنز به نحوی است که جریان عبوری از سیم‌پیچ سبب تولید شاری شود که با شار به وجود آورنده‌اش مخالفت کند.

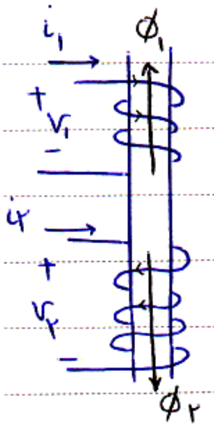



$\phi\uparrow$ شار

تذکر 3: با توجه به روابط گفته شده، ولتاژ القایی دو سر یک سلف (سیم‌پیچ) وابسته به شار عبوری از آن است.




حال دو سیم‌پیچ زیر را در نظر بگیرید که روی یک هسته بسته شده‌اند.



کل شار عبوری از هر سیم پیچ (شار تشدید) : $\phi = \phi_1 + \phi_2$

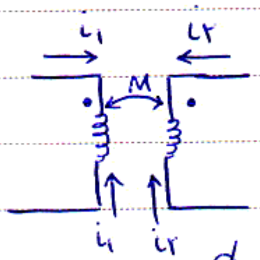
جهت مثبت به سمت بالا $\phi = \phi_1 - \phi_2$ شار تضعیف

و می‌دانیم بوسیله ولتاژ دو سر هر سلف به شار عبوری از آن‌ها مربوط است. در مثال‌های فوق شار عبوری از هر سیم پیچ به سیم پیچ دیگر نیز وابسته است. به چنین حالتی که شار عبوری از سیم پیچ‌ها به یکدیگر وابسته باشد سلف‌ها تزویج شده می‌گوییم. تزویج بین سلف‌ها می‌تواند به صورت مثبت یا منفی باشد.

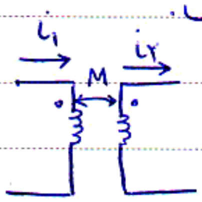
وقتی شار تولیدی یکی در جهت موافق با شار تولیدی دیگری باشد تزویج اثر مثبت و در غیر این صورت اثر منفی دارد.

قرارداد در تحلیل مدار :

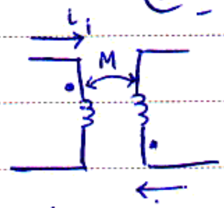
سلف‌های تزویج شده را با سرهای نقطه دار نشان می‌دهیم. وقتی ورود یا خروج جریان به سرهای نقطه دار هر دو سلف یکسان باشد تزویج مثبت و در غیر این صورت تزویج منفی است.




$\phi = \phi_1 + \phi_2$




$\phi = \phi_1 - \phi_2$




$\phi = \phi_1 + \phi_2$

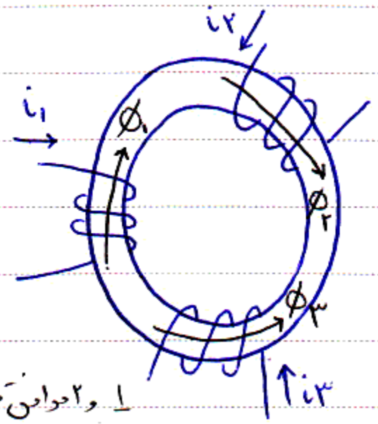
در دو سر سلف تزویج شده با ضریب تزویج M شارهای عبوری به صورت زیر بیان می‌شوند :

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \\ \lambda_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

$$v = \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \pm M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = \pm M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

مثال) سه سلف تزویج شده زیر را در نظر بگیرید.



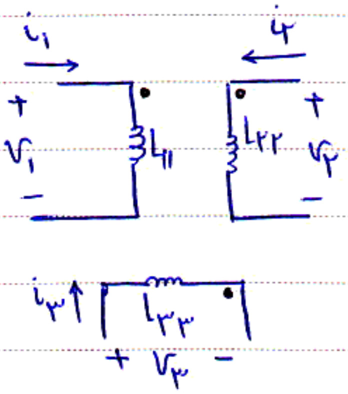

۱ و ۲ موافق هم دو
با ۳ مخالف.

ماتریس اندوکتانس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix}$$

عناصر قطری، اندوکتانس های خودی و عناصر غیر قطری، اندوکتانس های متقابل است.

با تعیین سرهای نقطه دار و سیم پیچی این سه سلف روابط ولتاژ را می‌نویسیم:




$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} - L_{13} \frac{di_3}{dt}$$

$$v_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} - L_{23} \frac{di_3}{dt}$$

با ۱ و ۲ مخالف $\quad v_3 = -L_{13} \dfrac{di_1}{dt} - L_{23} \dfrac{di_2}{dt} + L_{33} \dfrac{di_3}{dt}$

مثال روابط در حوزه فازور به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$$

$$v_1 = (L_{11} j\omega) i_1 + (L_{12} j\omega) i_2 - (L_{13} j\omega) i_3$$

$\vdots$

موازی و جهت جریان خلاف $\qquad \lambda_1 = -\lambda_2$

$\lambda_2 = -i_1 + 4i_2 - i_3$

$\lambda_3 = 2i_1 - i_2 + 3i_3$

$$3i_1 - i_2 + 2i_3 = i_1 - 4i_2 + i_3$$

$$\longrightarrow 2i_1 + 3i_2 = -i \quad (1)$$

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_3$ یا $\lambda = -\lambda_2 + \lambda_3$ سری ها

λ کل سیستم شار ترانس $= 5i_1 - 2i_2 + 5i \quad (2)$ $\qquad i = i_1 - i_2 \quad (3) \longrightarrow i_1 = i + i_2$

جایگذاری در ۱ و ۲ ،

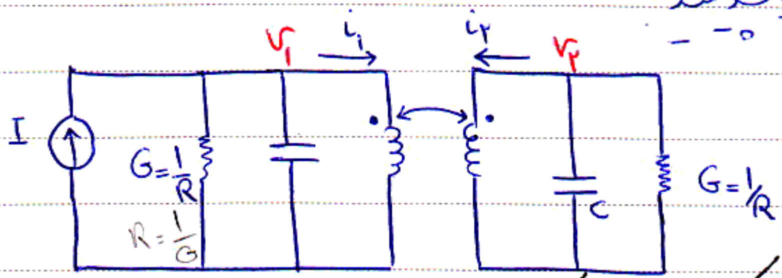
$$2i + 2i_2 + 3i_2 = -i \longrightarrow 3i = -5i_2$$

$$i_2 = -\frac{3}{5}i$$

$$\lambda = 5\underbrace{\left(i - \frac{3}{5}i\right)}_{i_1} - 2\times\left(-\frac{3}{5}i\right) + 5i \qquad \lambda = 2i + \frac{6}{5}i + 5i$$

$$\lambda = \frac{41}{5}i \longrightarrow \boxed{L_{eq} = \frac{41}{5}}$$

مثال) $V_1$ و $V_2$ را با استفاده از آنالیز گره بیابید.




$$L = \begin{bmatrix} L & LK \\ LK & L \end{bmatrix}$$

در سلف های موازی راحت تر هم از ضریب القاء معکوس استفاده کنیم

$$\Gamma = \frac{L}{L^2(1-k^2)}\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

حل در حوزه فازور :

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$$

خازن ها $\times C \longrightarrow \frac{1}{j\omega}$ $\qquad \lambda \xrightarrow[\text{در فازور}]{} V$

P4PCO

$$\Gamma = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\begin{bmatrix}1 & -k\\ -k & 1\end{bmatrix}$$

در دو سلف تزویج شده ؟

$$\begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}(j\omega)V_1 + \Gamma_{12}(j\omega)V_2 \\ i_2 = \Gamma_{12}(j\omega)V_1 + \Gamma_{22}(j\omega)V_2 \end{cases}$$

$$\text{kcl}: \quad I = V_1 G + V_1 C\omega j + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_1 - kV_2)$$

$$\text{kcl}: \quad V_2 Cj\omega + V_2 G + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_2 - kV_1) = 0$$

$$\begin{cases} I_1 = V_1\left(G + Cj\omega + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) - \frac{k}{j\omega L(1-k^2)}V_2 \\ V_2\left(Cj\omega + G + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) = \frac{k}{j\omega L(1-k^2)}V_1 \end{cases}$$

دو معادله دو مجهول

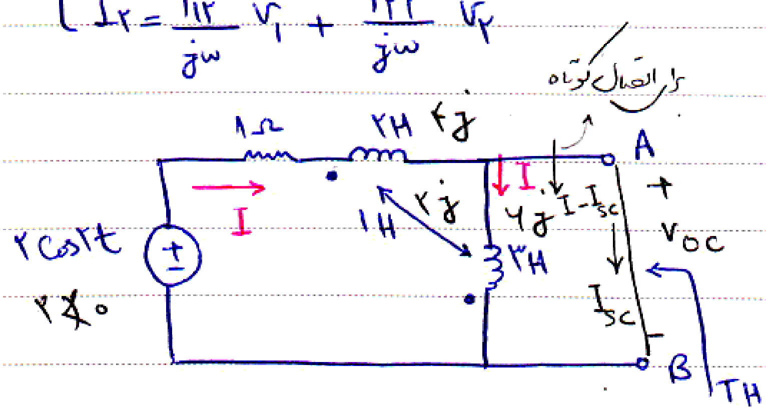
نکته) در حوزه فازور برای دو سلف تزویج شده ؟ :

$$\begin{cases} V_1 = L_{11}j\omega I_1 + L_{12}j\omega I_2 \\ V_2 = L_{12}j\omega I_1 + L_{22}j\omega I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\Gamma_{11}}{j\omega}V_1 + \frac{\Gamma_{12}}{j\omega}V_2 \\ I_2 = \frac{\Gamma_{12}}{j\omega}V_1 + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega}V_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1 \\ V_2\end{bmatrix}$$

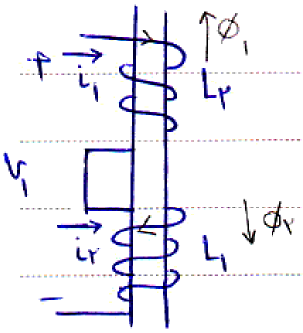
مثال) مدار معادل تونن را بیابید ؟




$\omega = 2$

استفاده از معادله دیفرانسیل کامل تر جواب را می دهد.

مثال) دو سلف تزویج شده سری

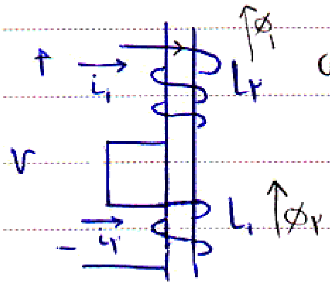


$$i_1 = i_2 = i$$

با توجه به جهت سیم پیچ ها:

$$v = v_1 + v_2$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di}{dt} - M \dfrac{di}{dt} \\ v_2 = -M \dfrac{di}{dt} + L_2 \dfrac{di}{dt} \end{cases} \xrightarrow{\text{تزویج منفی}} v = \underbrace{(L_1 + L_2 - 2M)}_{L_{eq}} \dfrac{di}{dt}$$



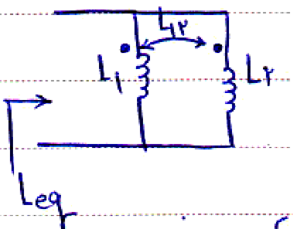
همه روابط قبلی

$$v = \underbrace{(L_1 + L_2 + 2M)}_{L_{eq}} \dfrac{di}{dt}$$ تزویج مثبت

مراحل حل سوال یکسان دارند در فصل بعد

در دو سلف سری تزویج شده : $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$

سلف معادل دو سلف تزویج شده موازی :



$$\lambda = Li$$

در دو سلف تزویج شده داریم :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

می توانیم جریان ها را برحسب شارها بنویسیم

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}}_{\Gamma} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\Gamma = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}$

ضرایب القا معکوس

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11} \lambda_1 + \Gamma_{12} \lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_{12} \lambda_1 + \Gamma_{22} \lambda_2 \end{cases}$$

در سلف های موازی، شارها با هم برابرند.

$$\lambda_1 = \lambda_2 \triangleq \lambda$$

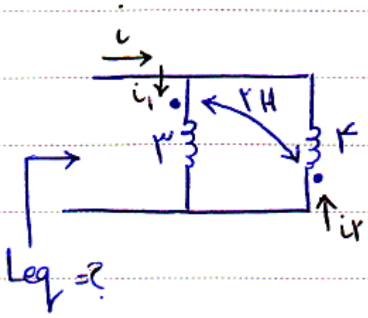
صفحه بعد

$i_۱ = (\Gamma_{۱۱} + \Gamma_{۱۲})\lambda$

$i_۲ = (\Gamma_{۱۲} + \Gamma_{۲۲})\lambda$

$i = i_۱ + i_۲ = (\Gamma_{۱۱} + \Gamma_{۲۲} + ۲\Gamma_{۱۲})\lambda$ $\quad$ $i = \underbrace{(\Gamma_{۱۱} + \Gamma_{۲۲} + ۲\Gamma_{۱۲})}_{\Gamma_{eq} = \frac{۱}{L_{eq}}}\lambda$

تمرین)




$L = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{۱}{۳\times۴ - ۲\times۲}\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$

$\Gamma = \begin{bmatrix} ۱/۲ & -۱/۴ \\ -۱/۴ & ۳/۸ \end{bmatrix}$

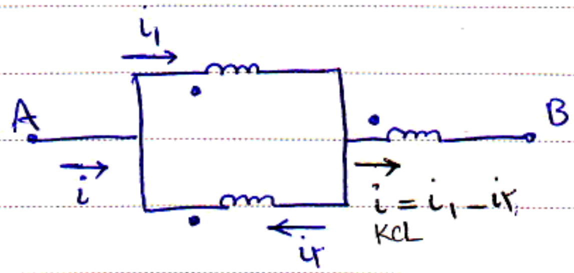
$\begin{cases} \lambda_۱ = \lambda \\ \lambda_۲ = -\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_۱ = \Gamma_{۱۱}\lambda_۱ + \Gamma_{۱۲}\lambda_۲ \\ i_۲ = \Gamma_{۱۲}\lambda_۱ + \Gamma_{۲۲}\lambda_۲ \end{cases}$

چون جهت جریان عکس

$\begin{cases} i_۱ = \frac{۱}{۲}\lambda + (\frac{-۱}{۴})\times(-\lambda) = \frac{۳}{۴}\lambda \\ i_۲ = (\frac{-۱}{۴}\times\lambda) + \frac{۳}{۸}(-\lambda) = -\frac{۵}{۸}\lambda \end{cases}$

KCL $\quad i = i_۱ - i_۲ = (\frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۸})\lambda = \frac{۱۱}{۸}\lambda$ $\quad$ $i = \frac{۱۱}{۸}\lambda \longrightarrow \Gamma_{eq} = \frac{۱}{L_{eq}} = \frac{۱۱}{۸} \longrightarrow L_{eq} = \frac{۸}{۱۱}$

مثال) سلف معادل از دیدگاه AB را بدست آورید.




$L = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

۱ و ۳ موافق هردو
با ۲ مخالف

$\lambda_۱ = ۳i_۱ - i_۲ + ۲i_۳$

$i_۳ = i$

Subject:
Year. Month. Date. توزیع شده

در حوزه‌ی مدار باز حل می‌کنیم :

$$KVL:\quad 2 = I + 4jI - 2jI + 6jI - 2jI$$

$$V_{oc} = 4jI$$

$$2 = (1+6j)I$$

$$I = \frac{2}{1+6j} \qquad V_{oc} = \frac{8j}{1+6j} = 1.29 + 0.21j = 1.307 \angle 9.24^\circ$$

اتصال کوتاه :

$$KVL:\quad 2 = I + 4jI - 2j(I - I_{sc})$$

$$2 = I(1+2j) + 2jI_{sc}$$

$$KVL:\quad 6j(I - I_{sc}) - 2jI = 0 \longrightarrow 4jI = 6jI_{sc} \longrightarrow I = \frac{3}{2} I_{sc}$$

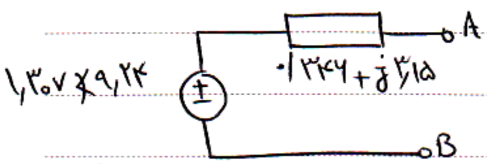
جایگذاری :

$$2 = \left(\frac{3+6j}{2} + 2j\right) I_{sc} = \frac{3+10j}{2} I_{sc}$$

$$I_{sc} = \frac{4}{3+10j} = 0.11 - 0.367j = 0.412 \angle -74.5$$

$$Z_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{1.307 \angle 9.24}{0.412 \angle -74.5} = 3.172 \angle 83.74 = 0.346 + j\,3.15$$

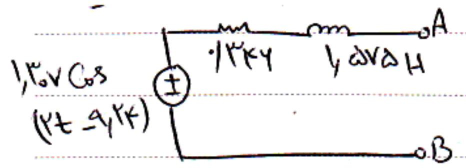
مدار معادل تونن :




$$\underset{\downarrow}{2}$$

$$Lj\omega = 3.15j$$

یا



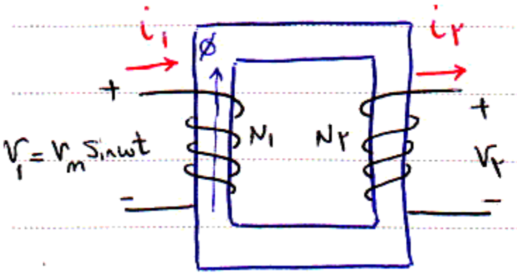

مدار معادل T :

$$\begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = L_2 - M \\ L_c = M \end{cases}$$



$$\text{ضریب تزویج}\; K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad (K \leq 1)$$

ترانس ایده‌آل:




از یک هسته و دو سیم پیچ تشکیل شده. با اعمال ولتاژ به سیم پیچ اول، شاری در هسته جاری می‌شود که از رابطه زیر پیروی خواهد کرد:

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_m}{N_1}\sin\omega t \longrightarrow \phi = \frac{V_m}{N_1\omega}\cos\omega t$$

این شار از سیم پیچ دوم عبور می‌کند و در آن ولتاژ زیر القا می‌شود:

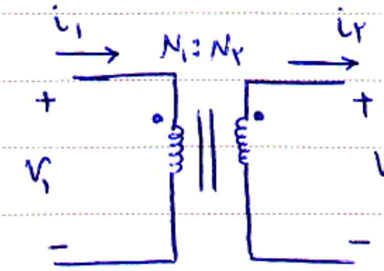
$$V_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{N_2}{N_1}\underbrace{V_m \sin\omega t}_{V_1}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

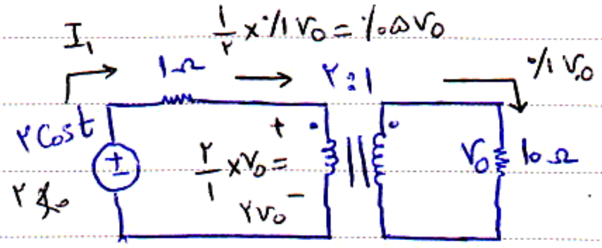
در ترانس ایده‌آل، تلفات سیستم صفر فرض می‌شود، بنابراین قدرت لحظه‌ای دو سیم پیچ برابر است. $P = Vi$

$$V_1 i_1 = V_2 i_2 \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{i_2}{i_1} \longrightarrow \boxed{\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}} \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1}$$

سمبل گرافیکی:




مثال: قدرت کشیده شده از منبع را به دست آورید؟ ولتاژ خروجی را؟ $(V_0)$




از فازور استفاده نمی‌کنیم چون سلف و خازن نداریم.

در ترانسفورماتورها جهت جریان از سر نقطه‌دار به یکی وارد و از دیگری خارج می‌شود

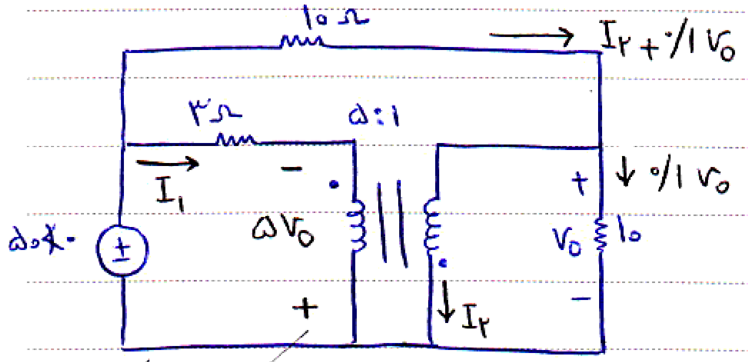
$$KVL:\ 2\cos t = 1\times 0.05 V_0 + 2V_0$$

$$2\cos t = 2.05 V_0 \longrightarrow V_0 = 0.975 \cos t$$

$$I_1 = 0.05 V_0 = 0.0487 \cos t = 0.0487\angle 0 \qquad V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

$$\text{قدرت منبع } P = V_{rms}\times I_{rms} = \frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{0.0487}{\sqrt{2}} = 0.0487\ W$$

مثال) $V_0$ را به دست آورید.




$$I_1 = \frac{1}{5} I_2 \longrightarrow I_2 = 5 I_1$$

$$KVL:\ 50 = 3I_1 - 5V_0$$

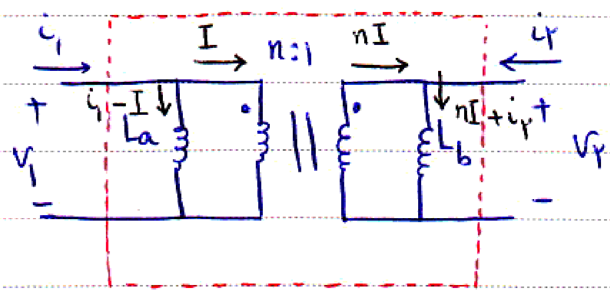
$$I_1 = \frac{50+5V_0}{3} \longrightarrow I_2 = \frac{250+25V_0}{3}$$

$$KVL:\ 50 = 10(I_2 + 0.1V_0) + V_0 \longrightarrow 50 = 10 I_2 + 2V_0$$

$$50 = \frac{2500+250V_0}{3} + 2V_0 \longrightarrow 150 = 2500 + 256 V_0 \longrightarrow V_0 = -9.18$$

تمرین) یکی از سرهای نقطه دار را عوض کرده و مجدداً $V_0$ را به دست آورید.

مثال) این مدار چگونه با دو سلف تزویج شده، با ماتریس القایی $L = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$ معادل می‌شود؟




$$V_1 = L_a \frac{d(i_1 - I)}{dt} = L_a\frac{di_1}{dt} - L_a\frac{dI}{dt} \quad (1)$$

$$v_2 = L_b \frac{d(nI + i_2)}{dt} = nL_b \frac{dI}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

$$v_1 = n v_2 \longrightarrow L_a \frac{di_1}{dt} - L_a \frac{dI}{dt} = n^2 L_b \frac{dI}{dt} + nL_b \frac{di_2}{dt}$$

$$(n^2 L_b + L_a)\frac{dI}{dt} = L_a \frac{di_1}{dt} - nL_b \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{L_a}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_1}{dt} - \frac{nL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_2}{dt} \quad (3)$$

۳ در ۱ :

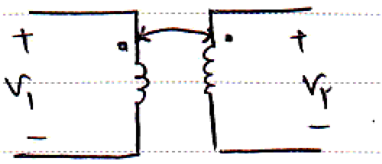
$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} - \frac{L_a^2}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_1}{dt} + \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_1 = \frac{n^2 L_a L_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_1}{dt} + \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_2}{dt}}$$

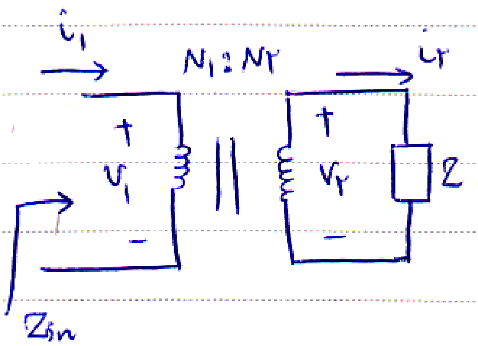
۳ در ۲ :

$$v_2 = \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_1}{dt} - \frac{n^2 L_b^2}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_2}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_2 = \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_1}{dt} + \frac{L_aL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_2}{dt}}$$




$$L = \begin{bmatrix} \frac{n^2 L_b L_a}{n^2 L_b + L_a} & \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \\ \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} & \frac{L_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \end{bmatrix}$$




خاصیت ارجاع امپدانس در ترانس ایده‌آل :

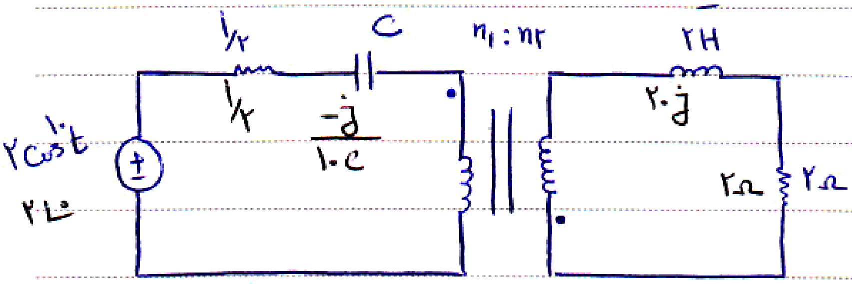
$$Z = \frac{v_2}{i_2}$$

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = ?$$

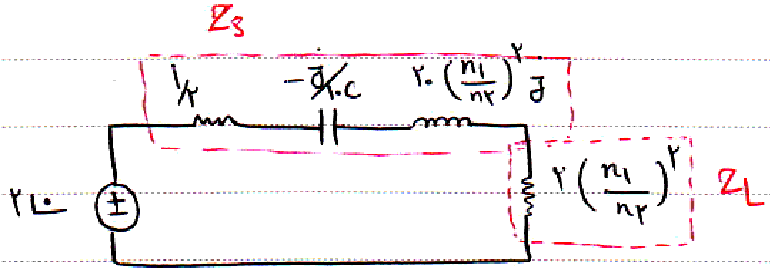
$$Z_{in} = \frac{V_1}{i_1} = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)V_2}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)i_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z$$

$\longrightarrow Z_{in} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z$ $\longrightarrow$ خاصیت ارجاع امپدانس (رابطه هم به هر حال نقطه دار یا ندار درست می‌باشند)

مثال) نسبت تبدیل $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$ ترانس و مقدار خازن را طوری پیدا کنید که توان تحویلی به مقاومت ۲Ω حداکثر شود.




به سمت اولیه ارجاع می‌دهیم :




$$\frac{n_1}{n_2} \triangleq n$$

$$Z_S = \frac{1}{2} + j\left(20n^2 - \frac{1}{10C}\right) \qquad Z_L = 2n^2$$

شرط انتقال حداکثر توان : $Z_L = Z_S^*$

$$2n^2 = \frac{1}{2} - j\left(20n^2 - \frac{1}{10C}\right)$$

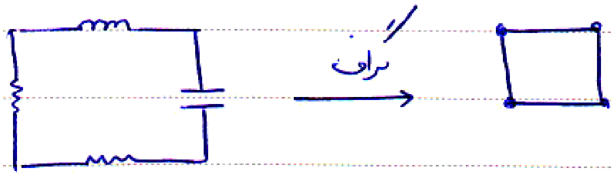
$$\begin{cases} 2n^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow n^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}} \\ 20n^2 - \frac{1}{10C} = 0 \longrightarrow 5 = \frac{1}{10C} \longrightarrow \boxed{C = 0/02\ f} \end{cases}$$

## فصل دوم: گراف‌ها و قضیه تلگان

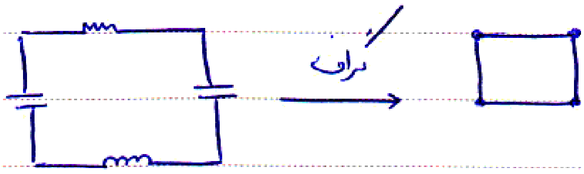
عناصر فشرده: عناصری می‌باشند که ابعاد آن‌ها نسبت به طول موج سیگنالی که آنها را تحریک می‌کنند کوچک است.

در غیر این صورت قوانین kvl و kcl دیگر برقرار نخواهد بود.

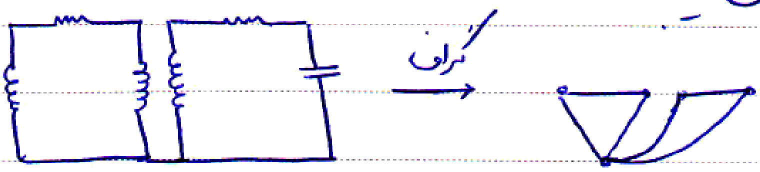
گراف:




قوانین kvl و kcl ارتباطی به ماهیت اجزاء مدار ندارد و می‌توان به‌عنوان به جای هر عنصر یک شاخه در گراف قرار داد و دو سر هر شاخه را با نقطه‌هایی که گره می‌نامند نشان داد.




* از روی گراف نمی‌توان تشخیص داد که شاخه دارای عناصر تزویج هست یا خیر




زیرگراف:

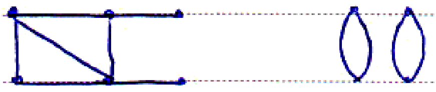
مفهوم زیرگراف به گراف مانند زیرمجموعه به مجموعه است که با حذف بعضی گره‌ها یا شاخه‌ها از یک گراف به دست می‌آید.

شکل گراف بالا زیرگراف

زیرگراف سره:

زیرگرافی که حداقل از یک گره تشکیل شده باشد.

گراف پیوسته: به گرافی پیوسته می‌گوییم که بین هر دو گره دلخواه آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

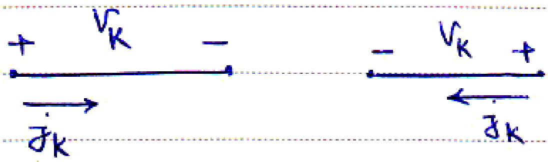


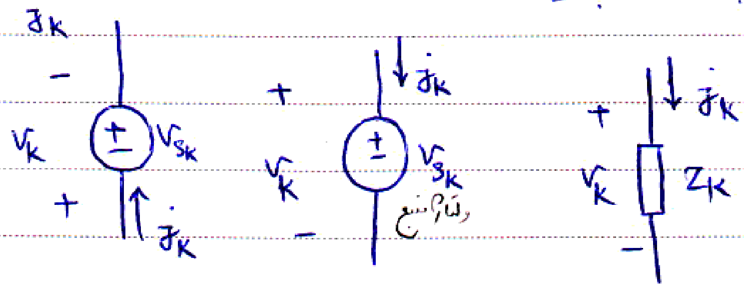
پیوسته    ناپیوسته

جهت‌های قراردادی جریان:

جهت جریان در شاخه به طور دلخواه انتخاب می‌شود ولی بلافاصله ولتاژ براساس جهت انتخاب شده قطب مثبت ولتاژ

در جهت ورود جریان قرار می‌گیرد



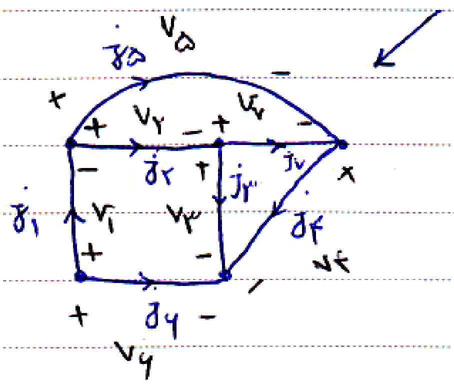




برای عناصر $V_k J_k > 0$

برای منابع $V_k J_k < 0$

گراف جهت‌دار:

گرافی که جریان شاخه‌ها روی آن تعیین شده باشد گراف جهت‌دار است.




ماتریس تلاقی گره و شاخه $(A_a)$:

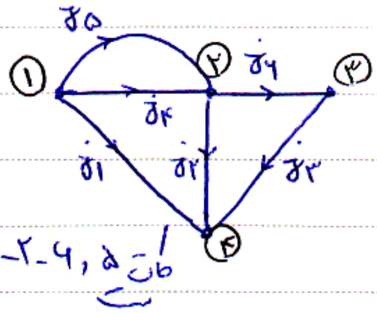
در یک گراف جهت‌دار عناصر ماتریس به صورت زیر فرض می‌شود:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

$A_a$

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } i \text{ تلاقی داشته و جریان از گره خارج شود.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ و گره } i \text{ تلاقی نداشته باشند.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } i \text{ تلاقی داشته و جریان به آن وارد شود.} \end{cases}$$

مثال)




$$\begin{array}{c|cccccc} \text{گره} \backslash \text{شاخه} & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ \hline ۱ & & & & & & \\ ۲ & & & & & & \\ ۳ & & & & & & \\ ۴ & & & & & & \end{array}$$

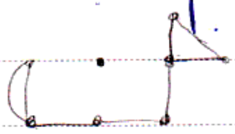
$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

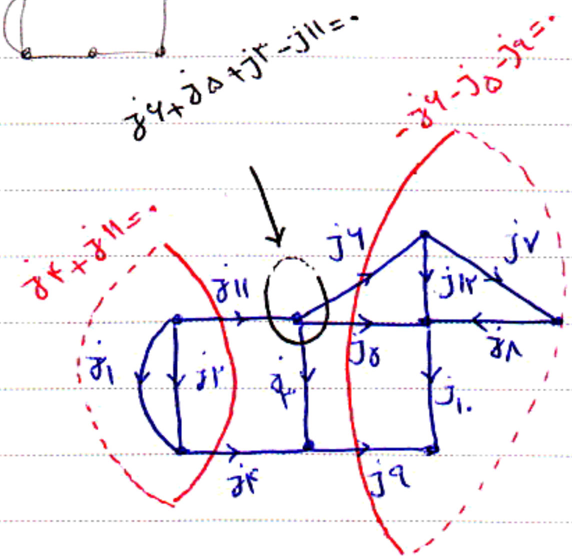
جمع جبری جریان های وارد شده به یک گره صفر است. حال این قانون را تعمیم می دهیم.

گراف کات ست: دسته ای از شاخه های یک گراف تشکیل کات ست را می دهند اگر دو شرط زیر را باهم داشته باشند:

۱) حذف تمام شاخه های این دسته یک گراف ناپیوسته باقی بگذارد.

۲) حذف تمام شاخه ها غیر یکی، گراف را پیوسته کند.






کات ست هایی که می توان تشخیص داد: ۱۱ و ۴،

کات ست ۵ و ۶ و ۹    کات ست ۷ و ۱۲ و ۶

گسترش قانون KCL: برای هر شبکه ی فشرده در هر لحظه از زمان، مجموع جبری جریان های خارج شده از کات ست صفر است.

قرارداد: اگر کات ست را با یک سطح گاوسی نشان دهیم، جریان های خارج شعاعی از کات ست با علامت مثبت و جریان های

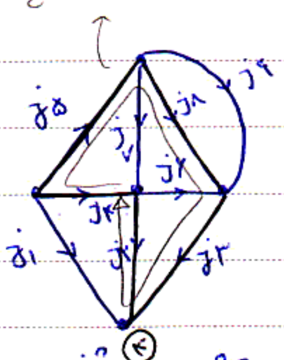
وارد شده با علامت منفی هستند. علامت های ترم دوم منفی در شکل

حلقه و قانون KVL : یک زیرگراف از یک گراف پیوسته را حلقه می گویند اگر دو شرط زیر را داشته باشند :

۱) زیرگراف پیوسته باشد.

۲) به هر گره فقط ۲ شاخه متصل باشد.

زیر حلقه




$$-v_4 + v_5 + v_8 + v_3 - v_2 = 0$$

قضیه تلگان : برای هر شبکه فشرده که گراف آن دارای b شاخه و $n_t$ گره باشد جهت های ولتاژ و جریان شاخه ها با $j_k$ و $v_k$ مشخص شده باشند، خواهیم داشت :

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

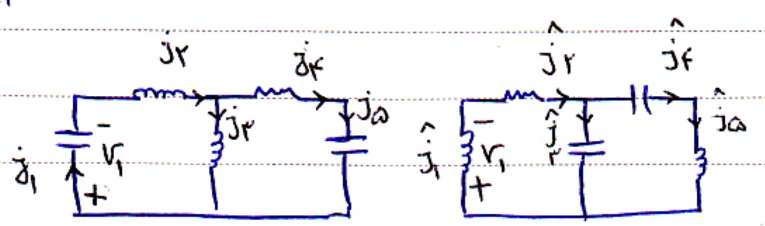
برای عناصر $v_k j_k > 0$ برای منابع $v_k j_k < 0$

تبصره : اگر دو شبکه گراف های یکسان داشته باشند و وقتی در دو گراف، شاخه ها را با شاخه نامگذاری کنیم و جهت ها را قرارداد جریان یکسان بگیریم، قضیه تلگان روابط زیر را نتیجه می کند :

$$1)\quad \sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k \hat{j}_k$$

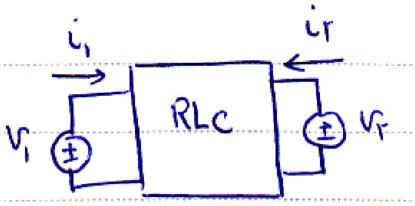
$$2)\quad \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k$$

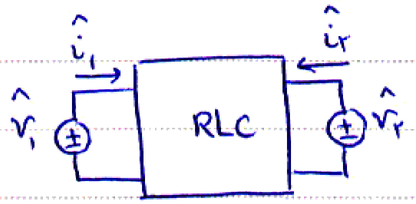
مثال)



به آزمایش زیر در جهت اثبات قضیه تلگان دقت کنید:

یک مدار RLC ثابت در نظر بگیرید که منابع آن را به صورت زیر جابجا می‌کنیم:




می‌خواهیم اثبات کنیم:

$$\hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2 = v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k$$

$$\hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} \hat{v}_k j_k}_{} = v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} v_k \hat{j}_k}_{}$$

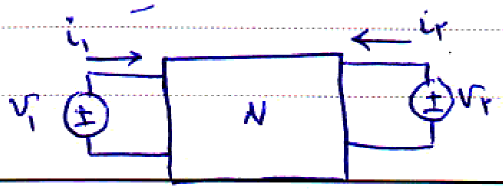
با هم برابرند

$$v_k = Z_k j_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} v_k \hat{j}_k = \sum_{k=3}^{b} Z_k j_k \hat{j}_k$$

$$\hat{v}_k = Z_k \hat{j}_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=3}^{b} Z_k \hat{j}_k j_k$$

$$\Longrightarrow v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 = \hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2$$

مثال) شبکه N از عناصر RLC خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده. اندازه‌گیری‌های زیر در آن انجام شده است:



$v_1 = 4\cos(\omega t + 60)$ , $v_2 = 0$

$i_1 = \cos(\omega t + 80)$ , $i_2 = 2\cos(\omega t + 70)$

$\hat{v}_1 = \cos(\omega t + 10)$ , $\hat{v}_2 = 2\cos(\omega t + 20)$ $\qquad \hat{i}_1 = ?$

به حوزه‌ی فازوری می‌بریم:

$V_1 = 4\angle 60 \qquad i_1 = 1\angle 80 \qquad \hat{V}_1 = 1\angle 10$

$V_2 = 0 \qquad i_2 = 2\angle 70 \qquad \hat{V}_2 = 2\angle 20$

اصل تصویر تقابل:

$$v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 = \hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2$$

$$4\angle 60 \times \hat{i}_1 + 0 = 1\angle 10 \times 1\angle 80 + 2\angle 20 \times 2\angle 70$$

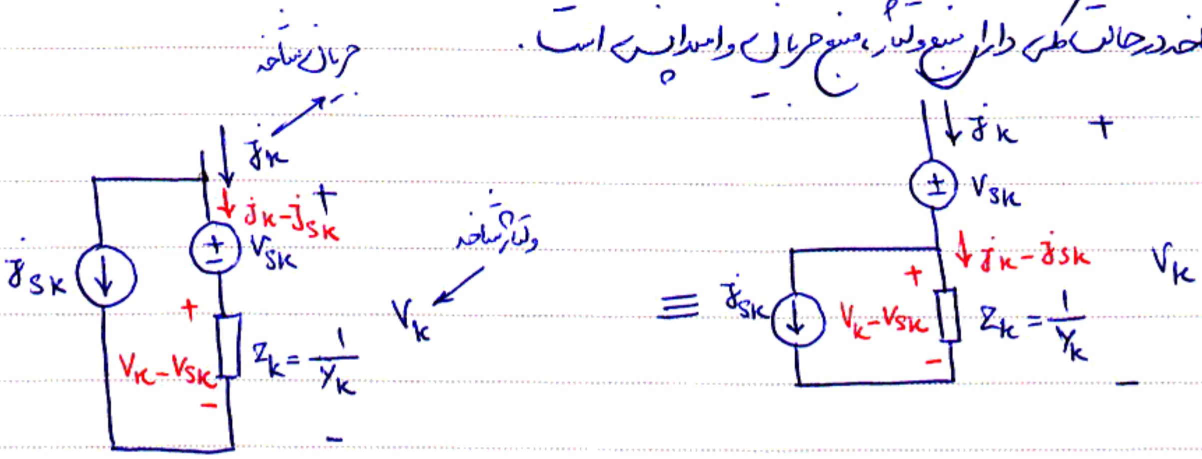
$$4\angle 60\ \hat{i}_1 = 1\angle 90 + 4\angle 90$$

$$\hat{i}_1 = \frac{5\angle 90}{4\angle 60} = \frac{5}{4}\angle 30 \longrightarrow \hat{i}_1 = \frac{5}{4}\cos(\omega t + 30)$$

# فصل ۱: تجزیه و تحلیل گره و مش

مدل کلی یک شاخه:

یک شاخه در حالت کلی دارای منبع ولتاژ، منبع جریان و امپدانس است.




معادلات KVL و KCL در هر دو به یک نتیجه منجر می‌شود که نشان می‌دهد هم معادلند.

بیان رابطه شاخه با KCL:

$$J_k = J_{sk} + V_k Y_k - V_{sk} Y_k$$

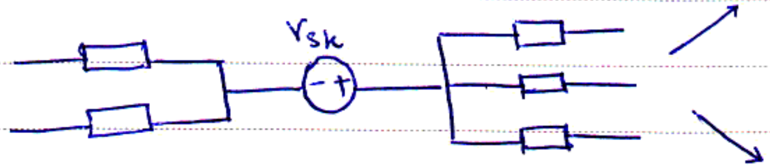
کاربرد در روش گره ولتاژ است.

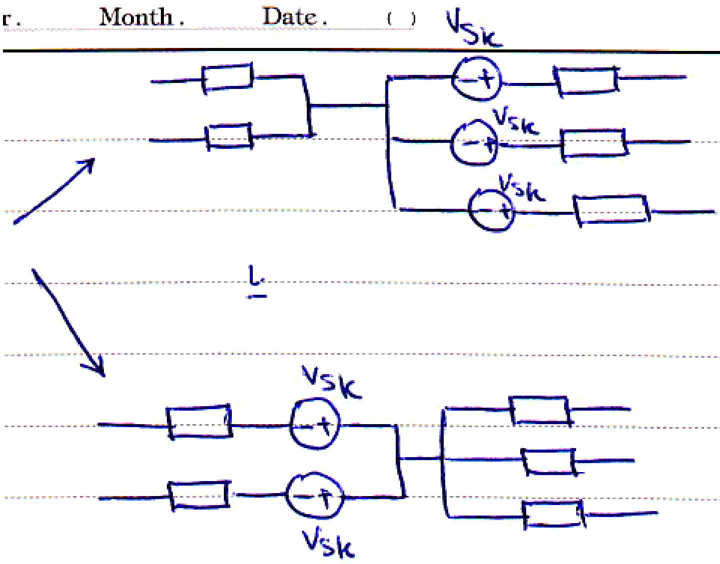
بیان رابطه شاخه با KVL:

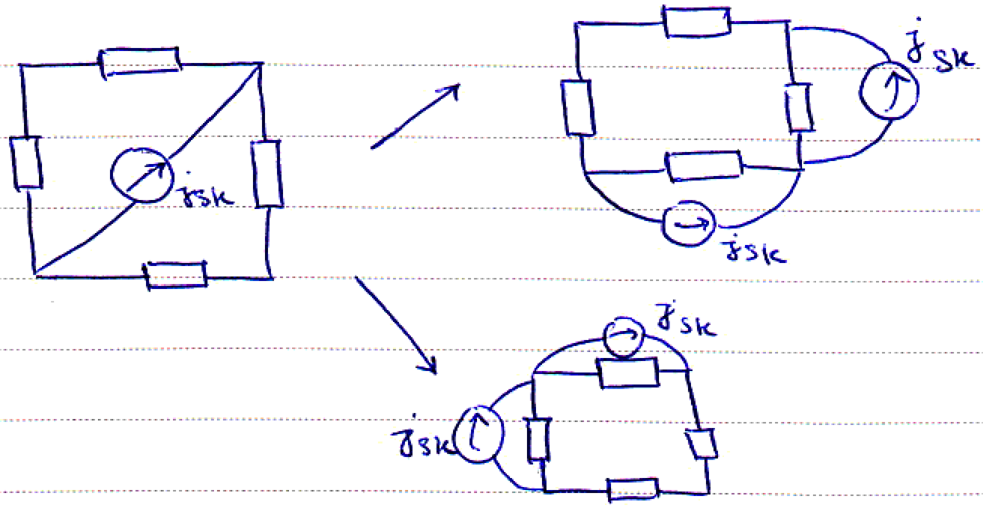
$$V_k = V_{sk} + Z_k J_k - Z_k J_{sk}$$

کاربرد در روش مش و حلقه اساسی.

- برای اینکه حداکثر شاخه‌هایی که تنها شامل منابع هستند از شاخه‌های دیگر لازم نباشد، تبدیل را اعمال انجام می‌دهیم که تغییری در نتیجه نهایی مدار حاصل نشود.

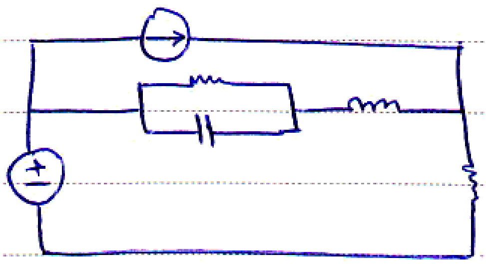


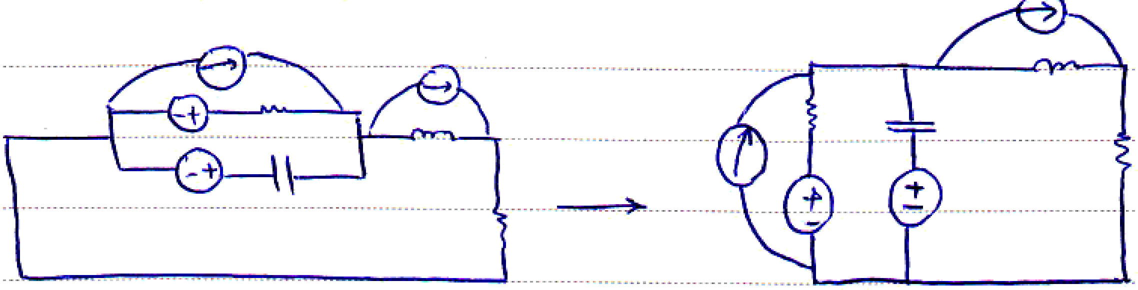



در تبدیل منابع ولتاژ اگر KVL به کار ببریم و در تبدیل منابع جریان اگر KCL به کار ببریم این معادلات اثبات می‌شود:

به عنوان مثال:





روش های تبدیل منابع نورتن هم برای منابع مستقل هم برای منابع وابسته برقرار است.

## تجزیه و تحلیل گره:

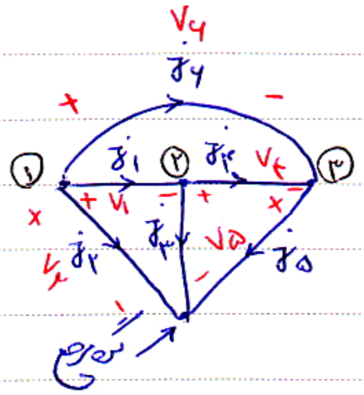
فرض کنید مداری دارای b شاخه باشد، در این صورت بردارهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_b \end{bmatrix}$$ بردار جریان شاخه‌ها

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}$$ بردار ولتاژ شاخه‌ها

در روش گره معمولاً گرهی که بیشترین اتصال به آن وجود دارد را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم. اگر $n_t$ تعداد کل گره‌ها باشد آنگاه: $n_t = n+1$

فرض کنید گراف جهت دار مدار به صورت زیر باشد ←




ماتریس تلاقی گره و شاخه در روش گره به صورت زیر است: $A = (A_a)$
بدون گره مبنا

$$A.J = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 + J_6 \\ -J_1 + J_3 + J_4 \\ -J_4 + J_5 - J_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ بسط قانون KCL

$$\rightarrow \boxed{A.J = 0}$$

بردار ولتاژ گره‌ها را با e نمایش می‌دهیم.

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

حال می‌خواهیم $A^t.e$ را به دست آوریم:

$$A^t.e = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A^t} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_2 - e_3 \\ e_3 \\ e_1 - e_3 \end{bmatrix}$$

جای سطرها و ستون‌های ماتریس A را با هم عوض می‌کنیم.

$$= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t e = v$$

استنباط KVL

اثبات قضیه تلگان:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

$$\longrightarrow v_1 j_1 + v_2 j_2 + \dots + v_b j_b = 0$$

$$\sum v_k j_k = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = v^t . j = (A^t . e)^t . j = e^t . A . j = 0$$

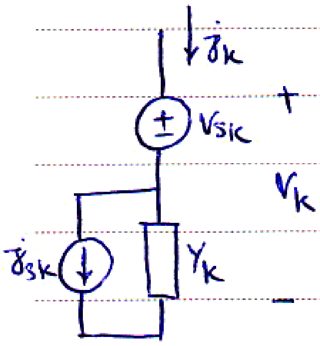
روش تجزیه و تحلیل گره:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

سه گونه روش اصلی پذیرفته است: در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی e مجهول معادلات است.

۱) روش منظم ۲) روش نظری ۳) روش میانبر

۱) روش منظم:




$$j_k = j_{sk} + Y_k v_k - Y_k v_{sk}$$

این رابطه را برای تمام شاخه‌های مدار می‌نویسیم:

$$j_1 = j_{s1} + Y_1 v_1 - Y_1 v_{s1}$$
$$j_2 = j_{s2} + Y_2 v_2 - Y_2 v_{s2}$$
$$\vdots$$
$$j_b$$

$$\xrightarrow{\text{بصورت ماتریسی}} j = j_s + Y v - Y v_s$$

دو طرف را در A ضرب می‌کنیم:

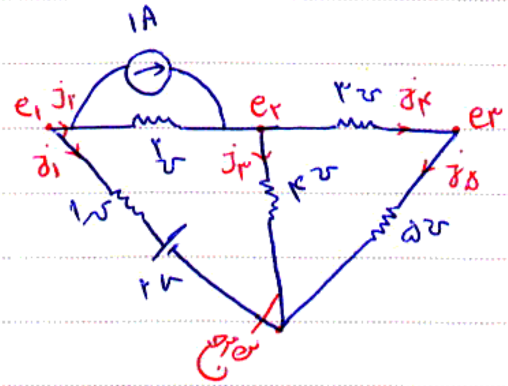
$$\underbrace{A . j}_{\downarrow\, 0} = A j_s + A Y \underbrace{v}_{\downarrow\, A^t . e} - A Y v_s$$

$$0 = A j_s + A Y A^t . e - A Y v_s$$

$$\underbrace{A Y A^t}_{Y_n} . e = \underbrace{A Y v_s - A j_s}_{I_s} \quad (A) \longrightarrow Y_n . e = I_s$$

خوبی این است معادله A، منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کند.

مثال) یک مدار ساده مقاومتی: $V = ?$




ابتدا استفاده از رول

$$j_k = j_{s_k} + y_k v_k - y_k v_{s_k}$$

$j_k$ ها را می‌نویسیم و سپس به صورت ماتریسی در می‌آوریم سپس:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$j_1 = 0 + 1v_1 - 1 \times 2$$

$$j_2 = 1 + 2v_2 - 2 \times 0$$

$$j_3 = 0 + 4v_3 - 4 \times 0$$

$$j_4 = 0 + 3v_4 - 3 \times 0$$

$$j_5 = 0 + 5v_5 - 5 \times 0$$

$?\ Y_n = A Y A^t$

$?\ I_s = A Y v_s - A j_s$

$\Rightarrow Y_n . e = I_s \Rightarrow$ ?

$v = A^t . e$ به دست می‌آید.

برای مثال بعدی

$$\underbrace{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix}}_{j} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{j_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{1/4}{\cancel{0}} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{v} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{1/4}{\cancel{0}} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_s}$$

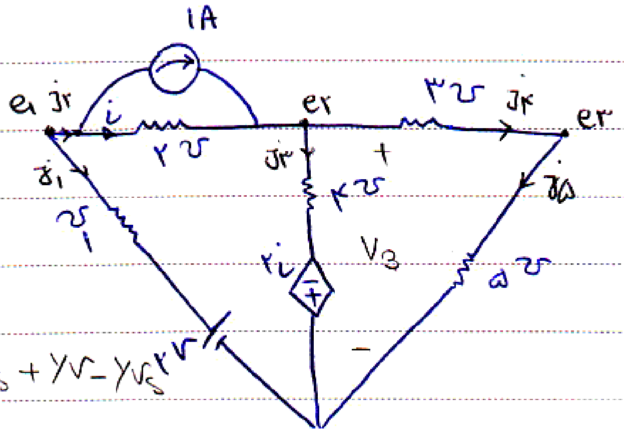
$$Y_n = A Y A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$I_s = A Y v_s - A j_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Y_n \cdot e = I_s$ $\qquad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow e$ بدست می‌آید.

$V = A^t \cdot e$

مثال)




ابتدا شکل را بدست می‌آوریم (i).

$i = j_2 - 1$

KCL: $j_2 = i + 1 \Rightarrow i = j_2 - 1$

$J = J_s + YV - YV_s$

$j_1 = 0 + 1v_1 - 1 \times 2$

$j_2 = 1 + 2v_2 - 2 \times 0$

$j_3 = 0 + 4(v_3 - (-2i)) = 4(v_3 + 2j_2 - 2) = 4v_3 + 8j_2 - 8 = 4v_3 + 16v_2 + 8 - 8 = 0 + 4v_3 + 16v_2 + 0$

$j_4 = 0 + 3v_4 - 3 \times 0$

$j_5 = 0 + 5v_5 - 5 \times 0$

$j_3 = 0 + 4v_3 - 4(-2i) = 4(v_3 - (-2i))$

$Y_n = AYA^t = ?$

$I_s = AYV_s - Aj_s = ? \longrightarrow Y_n \cdot e = I_s$

روش گره‌ای:

در شرایط زیر از روش گره‌ای استفاده می‌کنیم:

۱) منابع ولتاژ وجود نداشته باشند یا اگر وجود دارند به منابع جریان تبدیل شوند.

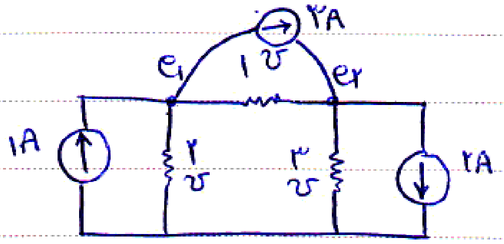
۲) سلف‌های تزویج شده و منابع وابسته وجود نداشته باشند، در این صورت در معادله‌ی $Y_n \cdot e = i_s$

می‌توان $Y_n$ و $I_S$ را مستقیماً به صورت زیر مشخص داد. $\quad Y_n \cdot e = i_S$

$$
Y_{ij} = \begin{cases} \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به گره } i \text{ ام} & i = j \\ -(\text{مجموع ادمیتانس‌های متصل بین گره } i \text{ و } j) & i \neq j \end{cases}
$$

$i_{S_i} =$ مجموع جریان‌های وارد شده به گره (وارد شده با علامت مثبت و خارج شده با علامت منفی)

مثال)




تعداد گره‌ها

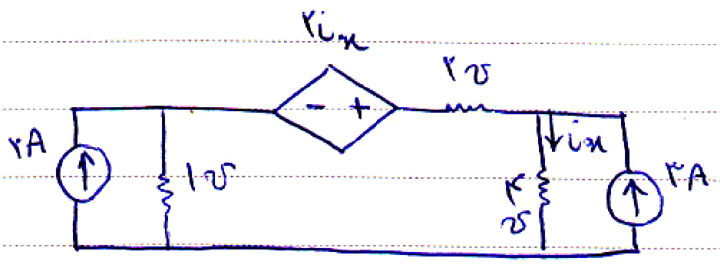
$$
\underset{2\times 2}{Y_n} = \begin{bmatrix} 1+2 & -1 \\ -1 & 1+3 \end{bmatrix}
$$

$$
i_S = \begin{bmatrix} 1-3 \\ 3-2 \end{bmatrix} \qquad Y_n \cdot e = I_S \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

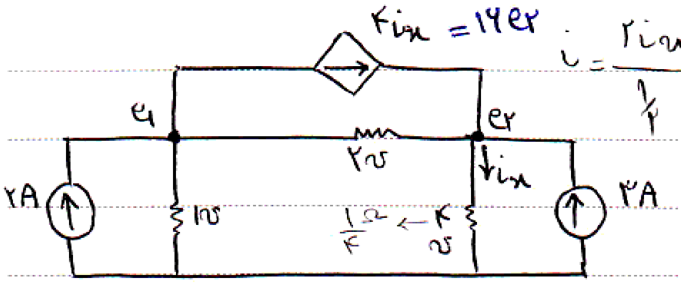
روش میانبر:

همان روش تحلیل گره است، با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. در این روش، ابتدا منابع وابسته را مانند منابع مستقل در نظر می‌گیریم و معادلات را از روش تحلیل گره می‌نویسیم. در اینجا اثر منابع وابسته را ماتریس $Y_n$ برمی‌گردانیم.

مثال)



حل: منابع ولتاژ به جریان تبدیل می‌شوند:




$i = \frac{2i_x}{1/2} = \frac{8e_2}{1/2} = 16e_2$

در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی $e$ مجهول معادلات است. وقتی از روش منابع استفاده می‌کنیم، تمام وابستگی‌ها برحسب $e$ نوشته می‌شوند

$i_x = \frac{e_2}{1/4} = 4e_2$ [illegible]

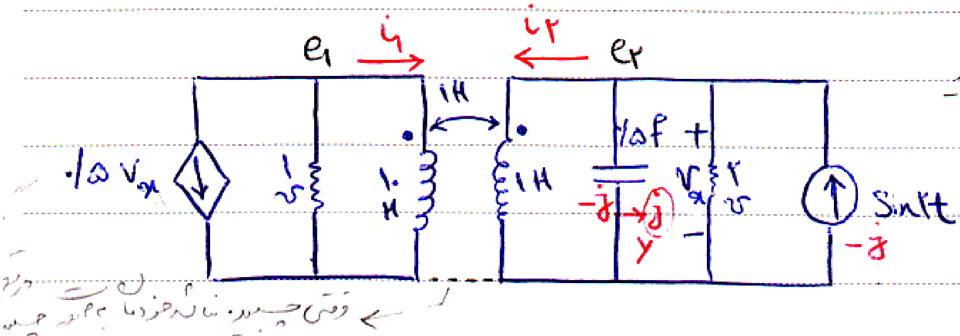
$$Y_n \cdot e = I_s \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \overset{+16}{} \\ -2 & 6 \underset{-16}{} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 16e_2 \\ 16e_2 + 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی:

وقتی منابع موجود در یک مدار در رژیم سینوسی به صورت یک فرکانس باشند می‌توان از تحلیل حالت دائمی استفاده کرد.

مثال) چون سلف مزدوج بسته داریم باید از تحلیل استفاده کنیم




$= \cos(2t - 90) \rightarrow -j$

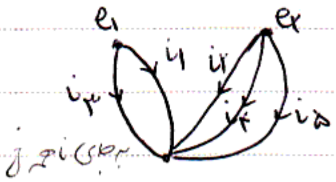
$$L = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{1}{10-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\lambda = Li \Rightarrow i = \frac{\lambda}{L} = \lambda\Gamma \xRightarrow{\text{فازور}} I = V\frac{1}{j\omega}\Gamma$$

در حوزه‌ی سینوسی پایدار:

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

معادلات گره به روش منظم:

$$j_K = j_{sK} + Y_K V_K - Y_K V_{sK}$$

$$j_3 = 0.5V_x + 1\times V_3 , \quad V_x = V_5 \qquad j_5 = -(-j) + 0 + 2V_5 \longrightarrow j_5 = j + 2V_5$$

$$j_4 = 0 + \gamma\times V_4 \longrightarrow j_4 = \gamma V_4 \qquad j_3 = 0.5\times V_5 + V_3 \longrightarrow j_3 = 0.5V_5 + V_3$$

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad j = j_s + YV - YV_s$$

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \end{bmatrix}}_{j_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{Y_b}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Y_n = AY_bA^t \qquad i_s = A\overset{0}{\cancel{Y_bV_s}} - Aj_s$$

معادلات انتگرال-دیفرانسیل:

چنانچه بخواهیم پاسخ کامل یک شبکه یعنی پاسخ به ورودی‌ها و حالات اولیه معلوم را حساب کنیم معادلات

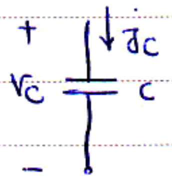
انتگرال - دیفرانسیل لازم خواهد بود.

اپراتور D :

$$\frac{d}{dt} \triangleq D$$

حال ادمیتانس های سلف، خازن را در حوزه ی انتگرال - دیفرانسیل را بدست می آوریم:

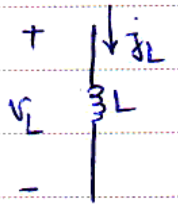
۱- خازن:




$$j_C = C\frac{d}{dt}v_C = CDv_C$$

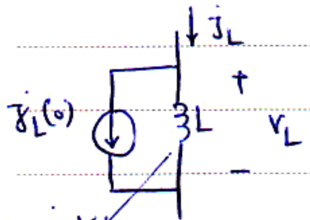
$$\boxed{Y_C = \frac{j_C}{v_C} = CD}$$

۲- سلف:




$$j_L = \frac{1}{L}\int v_L\, dt + j_L(0)$$

جریان اولیه ی سلف $j_L(0)$ را با یک منبع جریان موازی نشان می دهیم تا از معادلات حذف شود.

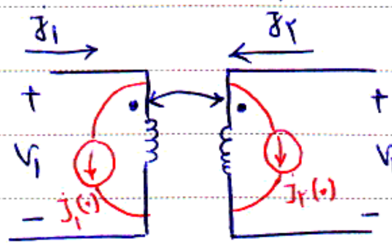



سلف بدون جریان اولیه

$$j = \frac{1}{L}\int v_L\, dt \Rightarrow v_L = L\frac{d}{dt}j$$

$$\boxed{v_L = LDj \Rightarrow Y_L = \frac{j}{v_L} = \frac{1}{LD}}$$

برای سلف های تزویج شده نیز می توانیم آن را تعمیم دهیم:




$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1(0) \\ j_2(0) \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه

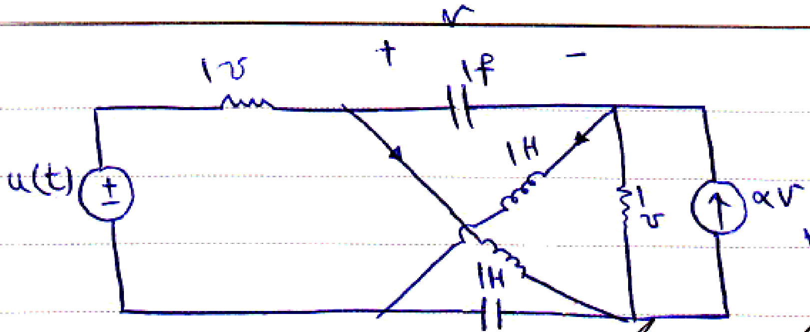
$$\lambda = Li$$

$$i = \lambda\Gamma$$

$$j = V\frac{1}{j\omega}\Gamma = V\frac{1}{D}\Gamma$$

$$j = \frac{1}{D}V\Gamma$$

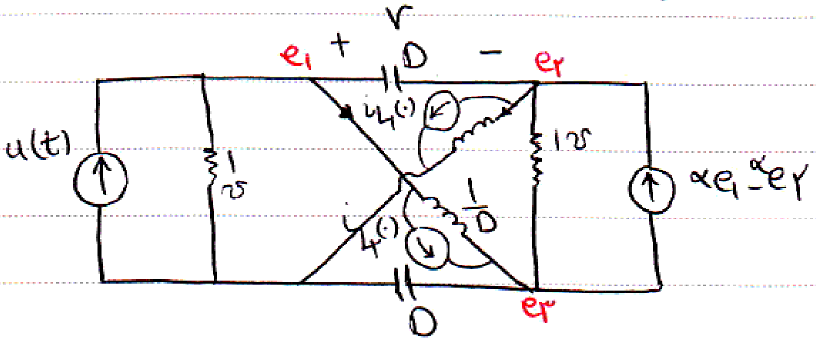
مثال) تمرین ۲۹ کتاب




$v_{c_2}(0), v_{c_1}(0)$ , $i_{L_1}(0)$ , $i_{L_2}(0)$

در حوزه‌ی انتگرال دیفرانسیل از روش ماتریس گره استفاده می‌کنیم

به دلیل وجود $u(t)$ ناچاریم از انتگرال دیفرانسیل حل کنیم.

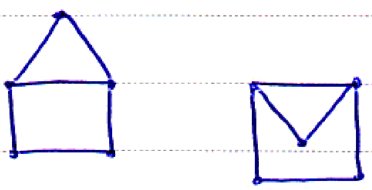



$$\begin{bmatrix} 1+D+\frac{1}{D} & -D & \frac{-1}{D} \\ -D-\alpha & 1+D+\frac{1}{D}+\alpha & -1 \\ \frac{-1}{D}+\alpha & -1-\alpha & 1+\frac{1}{D}+D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t)-i_{L_2}(0) \\ \alpha e_1-\alpha e_2-i_{L_1}(0) \\ -\alpha e_1+\alpha e_2+i_{L_2}(0) \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل مش:

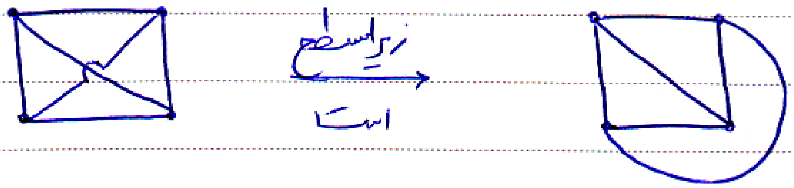
گراف‌های توپولوژیکی: گراف‌هایی هستند که از نظر رسم متفاوت‌اند ولی در واقع یک گراف هستند.

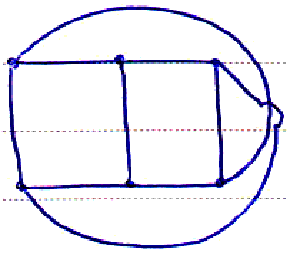
مثال)



گراف‌های مسطح: به گرافی گفته می‌شود که بتوان آن را در یک صفحه رسم کرد به طوری که هیچ شاخه‌ای یکدیگر را قطع نکنند.

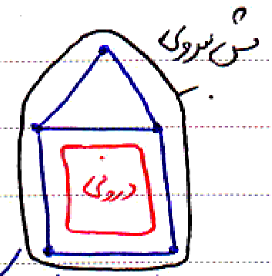
مثال)



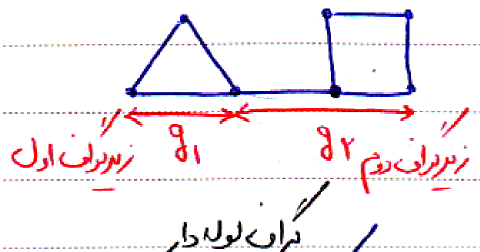




بخش درونی و بخش بیرونی:

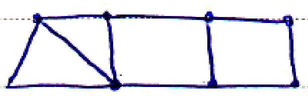
حلقه‌ای که درون آن هیچ ناحیه‌ای وجود نداشته باشد را بخش درونی و از این به بعد به اختصار بخش می‌گویند و حلقه‌ای که در خارج از آن هیچ ناحیه‌ای وجود نداشته باشد، بخش بیرونی است.




گراف‌های لولا دار و بی لولا: به گرافی لولا دار می‌گویند که بتوان آن را به دو زیرگراف ناسوده که تنها در یک نقطه به هم متصل است، تفکیک نمود.




به گرافی بی لولا می‌گویند که هرگاه به دو زیرگراف ناسوده تفکیک شوند، حداقل در دو نقطه به هم متصل باشند.

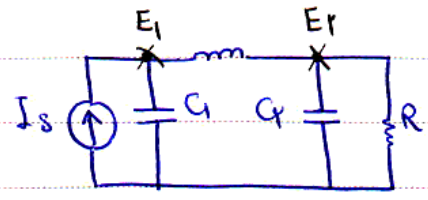


توجه) وقتی در یک مدار، بیشتر منابع جریان داشته باشیم، از KCL استفاده می‌کنیم.

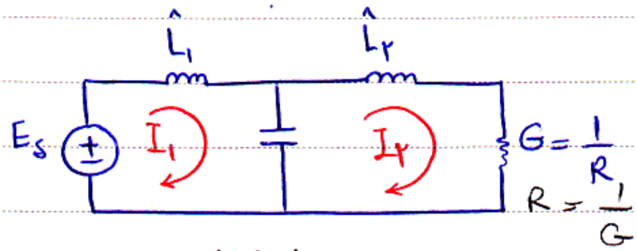
توجه) وقتی در یک مدار، بیشتر منابع ولتاژ داشته باشیم، از KVL استفاده می‌کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

**خاصیت دوگان:** این خاصیت در گراف‌های مسطح پیوسته بی‌لولا صدق می‌کند. عناصر شبکه باید دوقطبی باشند. بنابراین عناصری مانند ترانسفورماتور، سلف‌های تزویج شده و غیره را از بحث خارج می‌کنیم. به دو مدار زیر توجه کنید:




مدار (A)




مدار (B)

مدار A:

KCL
$$I_s = E_1 C_1 j\omega + \frac{E_1 - E_2}{Lj\omega}$$

$$\boxed{I_s = E_1\left(C_1 j\omega + \frac{1}{Lj\omega}\right) - E_2 \times \frac{1}{Lj\omega}} \quad (1)$$

KCL
$$\frac{E_1 - E_2}{Lj\omega} = E_2 C_2 j\omega + \frac{E_2}{R}$$

$$\boxed{E_1 \times \frac{1}{Lj\omega} - E_2\left(\frac{1}{Lj\omega} + C_2 j\omega + \frac{1}{R}\right) = 0} \quad (2)$$

مدار B:

KVL
$$E_s = \hat{L}_1 j\omega I_1 + \frac{1}{\hat{C}j\omega}(I_1 - I_2)$$

$$\rightarrow \boxed{E_s = I_1\left(L_1 j\omega + \frac{1}{\hat{C}j\omega}\right) - I_2 \times \frac{1}{\hat{C}j\omega}} \quad (3)$$

KVL
$$\frac{1}{\hat{C}j\omega}(I_2 - I_1) + \hat{L}_2 j\omega I_2 + R I_2 = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{\hat{C}j\omega} I_1 - I_2\left(\frac{1}{\hat{C}j\omega} + \hat{L}_2 j\omega + R\right) = 0} \quad (4)$$

Year. Month. Date. ( )

با مقایسه روابط ① تا ③ و همچنین ② تا ④ مشاهده می‌کنیم که یک تناظر یک به یک بین روابط وجود دارد.

$E \longleftrightarrow I$ — E جانشین را به I داده و برعکس.

$C \longleftrightarrow L$ — C جانشین را به L داده و برعکس.

$R \longleftrightarrow G = \frac{1}{R}$ — R جانشین را به G داده و برعکس.

* این دو مدار (A و B) دوگان هم هستند به عبارتی اگر مدار A را حل کنیم، پاسخ آن برای مدار B قابل استفاده است.

گراف‌های دوگان:

دو گراف $g$ و $\hat{g}$ را دوگان می‌گویند، اگر سه شرط زیر را داشته باشند:

(به ازای هر تعداد مش همان تعداد گره)

۱ـ میان مش‌های $\hat{g}$ با در نظر گرفتن مش بیرونی و گره‌های $g$ یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۲ـ میان مش‌های $g$ با در نظر گرفتن مش بیرونی و گره‌های $\hat{g}$ یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۴ـ میان شاخه‌های دو گراف یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد به طوری که هرگاه دو مش یک گراف دارای شاخه‌ی مشترک باشند، گره‌های متناظر با این دو مش در مدار دوگان شاخه‌ای داشته باشد که این دو گره را به هم وصل می‌کند.

الگوریتم ساختن مدار دوگان:

۱ـ برای هر یک از مش‌های $g$ با احتساب (در نظر گرفتن) مش بیرونی، یک گره از $\hat{g}$ را متناظر می‌کنیم.

۲ـ برای هر شاخه‌ی $K$ از $g$ که بین مش‌های $i$ و $j$ مشترک است، یک شاخه از $\hat{g}$ متناظر می‌کنیم که گره‌های $i$ و $j$

ĝ را متصل کنید.

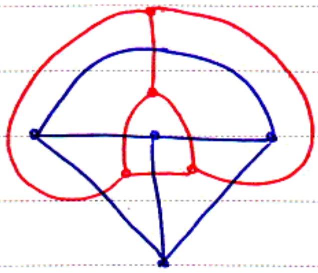
۳- بین عناصر g و ĝ تناظر زیر را به وجود می‌آوریم؟

L ⟷ C

R ⟷ G

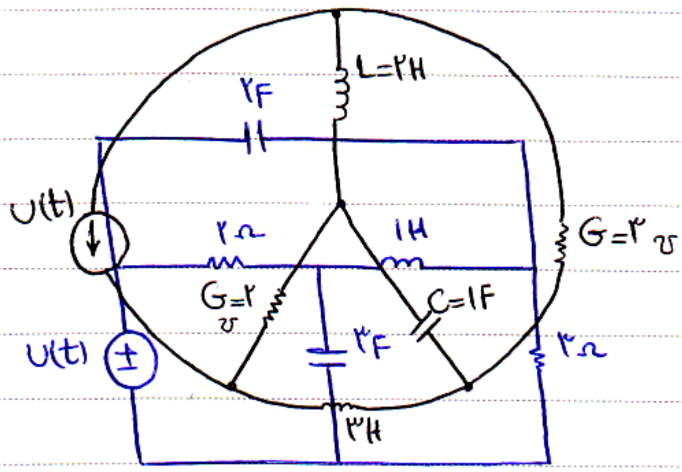
مثل منابع جریان I ⟷ E مثل منابع ولتاژ

مثال) گراف‌های دوگان گراف زیر را به دست آورید؟



متناظر با هر مش در دوگان یک گره می‌گذاریم.

مثال) گراف دوگان مدار زیر را به دست آورید.

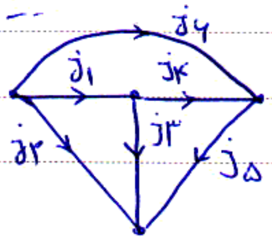



جریان به سر مثبت منبع وارد می‌شود.

تجزیه و تحلیل مش:

در یک مدار که دارای b شاخه و $n_t$ گره باشد، تعداد مش‌ها عبارت است از: $L=b-n_t+1$

در روش مش برای هر یک از مش‌ها جهت عقربه‌های ساعت را به عنوان جهت قراردادی در نظر می‌گیریم.




$L = \underbrace{۶}_{\text{شاخه}} - \underbrace{۴}_{\text{گره}} + ۱ = ۳$

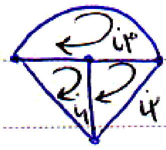
$V$ بردار ولتاژ شاخه‌ها $= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$

$i$ بردار جریان مش‌ها $= \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix}$

ماتریس $M$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } i \text{ ام قرار داشته هم جهت با مش باشد} \\ 0 & \text{اگر شاخه‌ی } k \text{ در مش } i \text{ ام نباشد} \\ -1 & \text{اگر شاخه‌ی } k \text{ در مش } i \text{ ام قرار داشته مخالف با مش باشد.} \end{cases}$$

ماتریس $M$ برای مدار بالا:




$$M_{ik\,(3\times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 6}$$

استنباط‌های KVL و KCL:

$$M\cdot V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 + v_3 \\ -v_3 + v_4 + v_5 \\ -v_1 - v_4 + v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

استنباط KVL: $\boxed{M\cdot V = 0}$

$M^t \cdot i = ?$

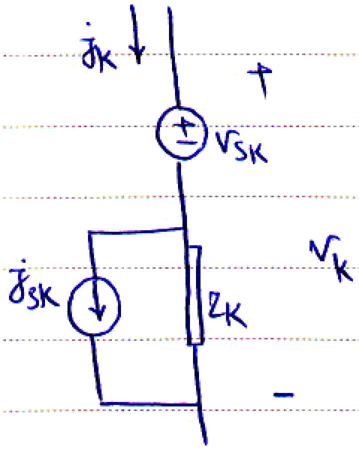
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_3 \\ -i_1 \\ i_1 - i_2 \\ i_2 - i_3 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix}$$

استنباط KCL: $\boxed{M^t \cdot i = j}$

روش آنالیز مش:

سه روش وجود دارد: مستقیم / تئوری / بیانیه

روش مستقیم:




$$v_k = v_{sk} + z_k j_k - z_k j_{sk}$$

وقتی رابطه‌ی بالا را برای تمام شاخه‌ها به صورت ماتریسی نوشته شود:

$$V = V_s + Z_b J - Z_b J_s$$

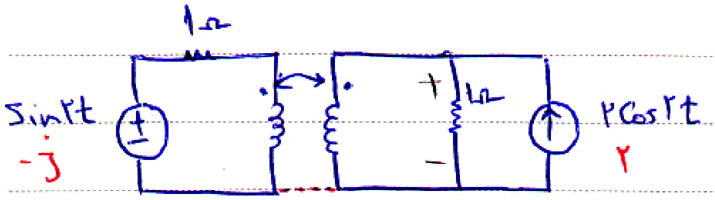
دو طرف را در M ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{M.V}_{0} = MV_s + MZ_b \underbrace{J}_{M^t.i} - MZ_b J_s$$

$$\boxed{\overbrace{M Z_b M^t}^{Z_m} . i = \underbrace{M Z_b J_s - M V_s}_{e_s}} \quad (1) \Rightarrow Z_m . i = e_s$$

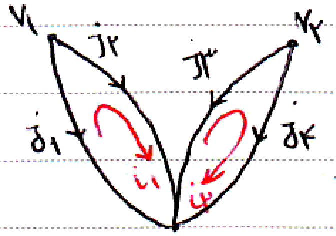
طرف راست معادله‌ی (1) که منابع جریان مستقل را به منابع ولتاژ تبدیل می‌کند.

مثال ۲)




$$L=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

گراف :




$$M=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ منابع را در ادوات ترکیب می‌کنیم.

$$V_k = V_{sk} + Z_k J_k - Z_k J_{sk}$$

ابتدا برای سلف‌های تزویج شده می‌نویسیم :

$$\begin{bmatrix}V_2\\ V_3\end{bmatrix} = j\omega\begin{bmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{12} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_2\\ J_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}V_2\\ V_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2j & 2j\\ 2j & 4j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_2\\ J_3\end{bmatrix}$$

$V_1 = -j + 1\times J_1 - 1\times 0$

$V_4 = 0 + 1\times J_4 - 1\times(-2)$

$$\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-j\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2j & 2j & 0\\ 0 & 2j & 4j & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{Z_b}\begin{bmatrix}J_1\\ J_2\\ J_3\\ J_4\end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2j & 2j & 0\\ 0 & 2j & 4j & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{Z_b}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -2\end{bmatrix}}_{J_s}$$

$$Z_m \cdot i = e_s$$

$$Z_m = M Z_b M^t = \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2j & 2j & 0\\ 0 & 2j & 4j & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-1 & 2j & 2j & 0\\ 0 & -2j & -4j & 1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+2j & -2j\\ -2j & 1+4j\end{bmatrix}$$

$$e_s = M Z_b J_s - M V_s$$

$$e_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & 2j & 4j & 0 \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \\ -2 \end{bmatrix}$$

روش نظری :

اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله‌ی $Z_m . i = e_s$ ماتریس های $Z_m$ و $e_s$ را می توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان وجود نداشته باشند یا اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند. (ضمناً همه‌ی منابع مستقل باشند)

۲) سلف های تزویج شده در مدار وجود نباشد. تعداد مش ها $L$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1L} \\ \vdots & & \\ Z_{L1} & \cdots & Z_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ \vdots \\ e_{s_L} \end{bmatrix}$$

$$Z_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع امپدانس های موجود در مش } i \text{ ام} \\ i \neq j & -(\text{مجموع امپدانس های مشترک بین مش } i \text{ و } j) \end{cases}$$

$e_{s_i} =$ مجموع جبری منابع ولتاژ موجود در مش $i$ ام از قطب مثبت منبع وارد شدیم با علامت منفی و اگر از قطب منفی وارد شدیم با علامت مثبت.

روش مبانی :

همان روش نظری است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می توانند وجود داشته باشند. منابع وابسته را مثل منابع

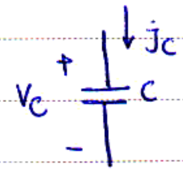
مستقل فرض می‌کنیم و وابستگی‌ها را برحسب جریان مش‌ها تعیین می‌کنیم و معادلات را به روش لوپ می‌نویسیم. در انتها ا

وابستگی‌ها را به ماتریس $Z_m$ برمی‌گردانیم.

معادلات انتگرال - دیفرانسیل:

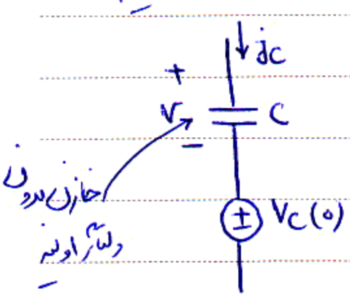
امپدانس‌های سلف و خازن را در این حوزه بدست می‌آوریم.

۱- خازن:




$$v_c = \frac{1}{c}\int j_c\, dt + v_c(0)$$

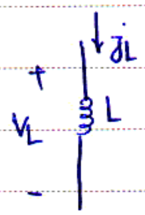
برای جدا کردن شرط اولیه از معادله آن را بصورت یک منبع ولتاژ سری با یک خازن بدون شرط اولیه نشان می‌دهیم




$$v = \frac{1}{c}\int j_c\, dt \Rightarrow c\frac{dv}{dt} = j_c$$

$$cDv = j_c \longrightarrow Z_c = \frac{v}{j_c} \Rightarrow \boxed{Z_c = \frac{1}{cD}}$$

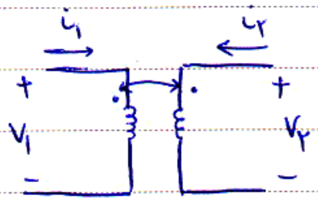
۲- سلف:




$$V_L = L\frac{dj_L}{dt} \longrightarrow V_L = LD\, j_L$$

$$\boxed{Z_L = \frac{V_L}{j_L} \longrightarrow Z_L = LD}$$

با تعمیم برای سلف‌های تزویج شده خواهیم داشت:



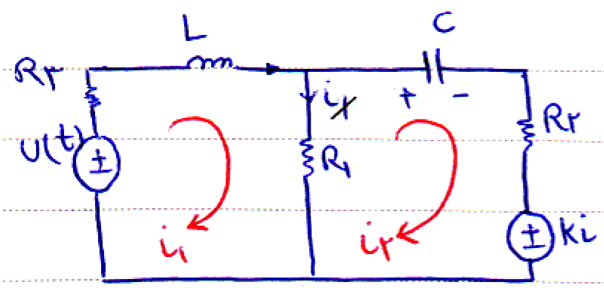

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$



$\lambda = Li \Rightarrow v = Lj\omega i = LDi$

$v = LDi$

مثال)

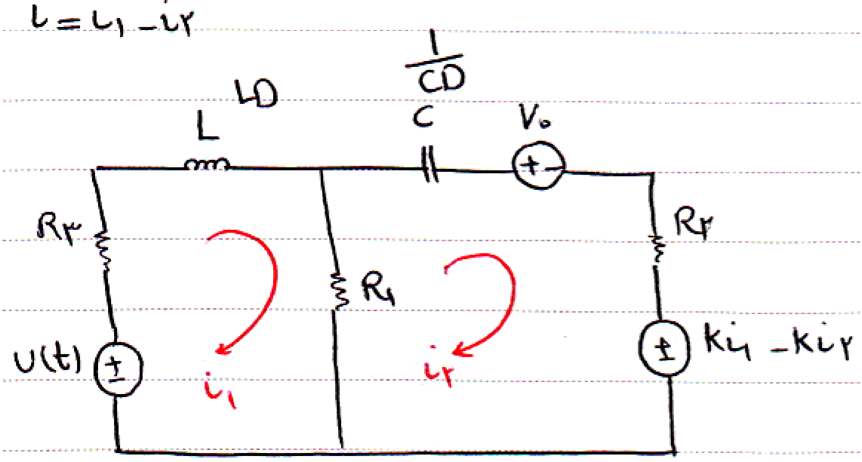



$V_C(0)=V_0$

$i_L(0)=I_0$

حل از روش ماتریسی مش: چون مدار در رژیم سینوسی نیست،
دارای سلف و خازن است و شرایط اولیه داده شده باید در حوزه‌ی اپراتور دیفرانسیل حل کنیم.

$i=i_1-i_2$



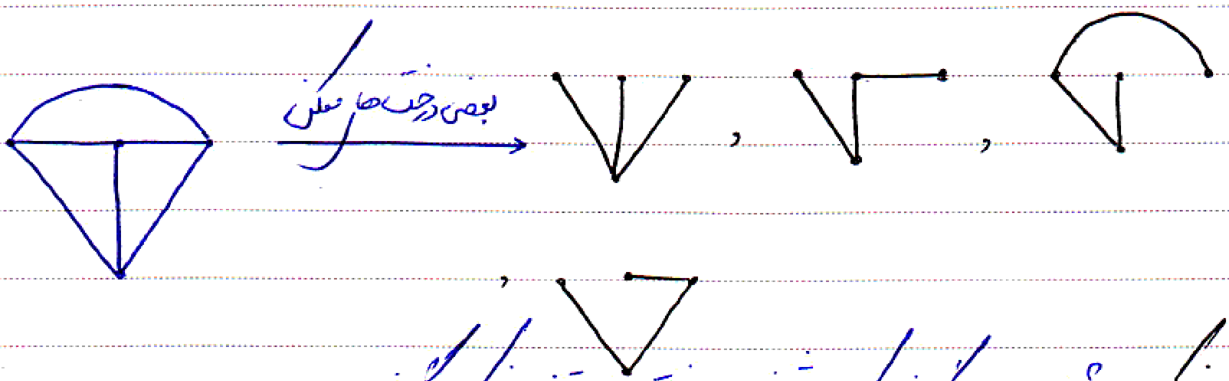

$Z_m \cdot i = e_s$

$$\begin{bmatrix} R_3+LD+R_1 & -R_1 \\ -R_1+K & R_1+\frac{1}{CD}+R_2-K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -V_0-\cancel{Ki_1}+\cancel{Ki_2} \end{bmatrix}$$

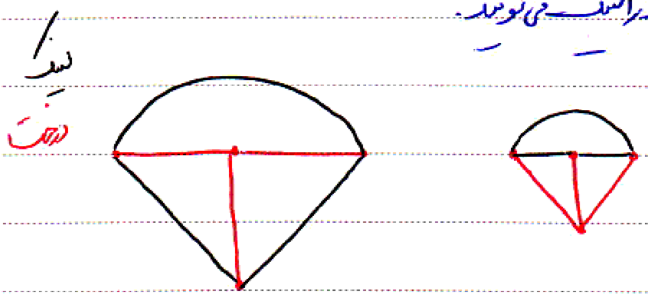
## فصل ۱۱ : تجزیه و تحلیل حلقه‌ی اساسی و کات‌ست اساسی :

**درخت :** یک زیرگراف از یک گراف پیوسته را درخت گویند اگر ۳ شرط زیر را دارا باشند :

۱) پیوسته باشد. ۲) تمام گره‌ها را شامل شود ۳) هیچ حلقه‌ای تشکیل ندهد




**لینک :** شاخه‌های از گراف که از شاخه‌های درخت نیستند را لینک می‌گویند.




**قضیه اساسی تئوری گراف :**

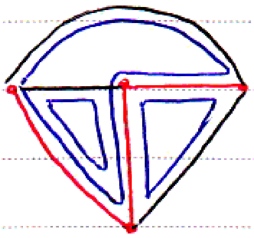
اگر گراف پیوسته‌ی G و درخت اختیاری T از آن گراف را در نظر بگیریم :

۱) بین هر دو گره‌ی دلخواه از گراف G روی درخت T یک مسیر منحصر به فرد وجود دارد.

۲) تعداد شاخه‌های درخت برابر $\overset{4-1=3}{n_t - 1}$ و تعداد لینک‌ها برابر $\overset{6-4+1=3}{b - n_t + 1}$ است.

۳) هر لینک درخت T همراه با مسیر منحصر به فرد بین دو گره آن لینک تشکیل یک حلقه می‌دهد به آن حلقه اساسی

متناظر با آن لینک می‌گویند.

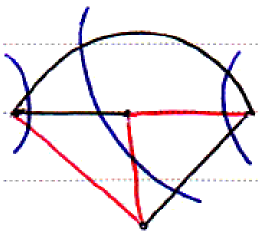


یعنی به تعداد لینک‌ها حلقه‌ی اساسی داریم.

۴) هر شاخه‌ی یک درخت T و تعدادی از لینک‌ها تشکیل یک کات ست منحصر به فرد را می‌دهد که به آن کات ست اساسی متناظر با آن شاخه‌ی درخت می‌گویند. یعنی به تعداد شاخه‌های درخت، کات ست اساسی داریم.

روش به دست آوردن کات ست اساسی متناظر با شاخه‌ی درخت:

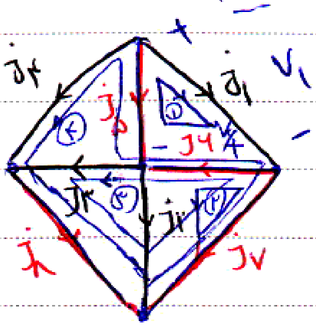
شاخه‌ی درخت مورد نظر را حذف می‌کنیم، درخت به ۲ قسمت مجزا تقسیم می‌شود. لینک‌هایی که این دو قسمت مجزا را هم وصل می‌کنند به همراه آن شاخه‌ی درخت، تشکیل کات ست اساسی متناظر با آن شاخه‌ی درخت را می‌دهند.



تجزیه و تحلیل حلقه‌ی اساسی:

قرارداد ۱) لینک‌ها را از $1$ تا $L$ و درخت‌ها را از $L+1$ تا $b$ شماره گذاری می‌کنیم.

قرارداد ۲) جهت حلقه‌ی اساسی متناظر با هر لینک را هم جهت با جریان لینک در نظر می‌گیریم.




فرض کنید یک گراف به همراه درخت انتخابی با شکل زیر باشد:

جهت‌ها اختیاری است.

حلقه‌ی اساسی متناظر با هر لینک را نشان می‌دهیم.

استنباط‌های KVL و KCL :

ماتریس B به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$B_{ij}=\begin{cases}1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن هم جهت باشد.}\\ 0 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ نباشد.}\\ -1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن خلاف جهت باشد.}\end{cases}$$

ماتریس B برای مثال قبلی :

$$B=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

استنباط‌های KVL و KCL :

$V=\begin{bmatrix}V_1\\ \vdots\\ V_b\end{bmatrix}$ : بردار ولتاژ شاخه‌ها

$i=\begin{bmatrix}i_1\\ \vdots\\ i_l\end{bmatrix}$ : بردار جریان حلقه‌های اساسی

$j=\begin{bmatrix}j_1\\ \vdots\\ j_b\end{bmatrix}$ : بردار جریان شاخه‌ها

$$B\cdot V=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\\ V_5\\ V_6\\ V_7\\ V_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_1-V_5+V_6\\ V_2+V_6-V_7\\ V_3+V_6-V_7+V_8\\ V_4-V_5+V_6-V_7+V_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$B\cdot V=0$ استنباط KVL

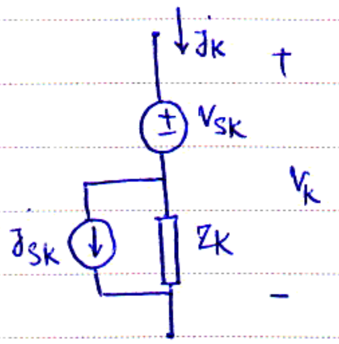
$$B^t . i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ -i_1 - i_4 \\ i_1+i_2+i_3+i_4 \\ -i_2-i_3-i_4 \\ i_3+i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{B^t . i = j}$$

استنباط KCL

معادلات حلقه‌ی اساسی: سه روش داریم: تنظیم / تعریف / ماتریس

۱- روش تنظیم

مجدداً تعمیم شاخه‌ای را بیاد آوریم.



$$V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk}$$

وقتی رابطه را برای تمام شاخه‌ها بنویسیم به صورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$V = V_s + Z_b j - Z j_s$$

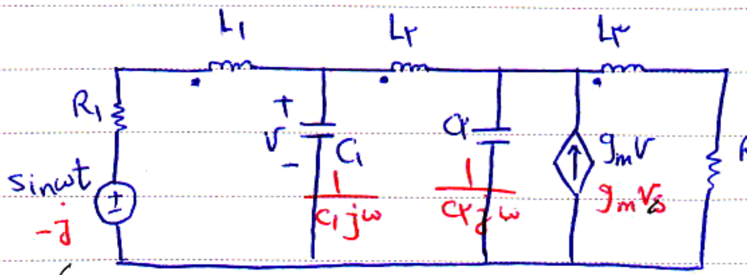
طرفین در $B$ ضرب می‌شود:

$$\underbrace{B . V}_{0} = B V_s + B Z_b \underbrace{j}_{B^t . i} - B Z j_s$$

$$\Rightarrow \underbrace{B Z_b B^t}_{Z_B} . i = \underbrace{B Z_b j_s - B V_s}_{e_s} \quad (A) \Rightarrow \boxed{Z_B . i = e_s}$$

مولفه‌ی $B Z_b j_s$، در طرف راست رابطه‌ی (A)، عمل تبدیل منابع مستقل جریان را به منابع ولتاژ انجام می‌دهد.

مثال: در مدار زیر به روش تنظیم حلقه‌ی اساسی ماتریس را ارائه دهید.




$$L = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sin\omega t = 1\cos(\omega t - 90) = 1\angle -90 = \cos(-90) + j\sin(-90) = -j$$

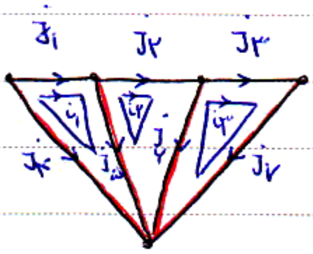
$$\sin\omega t = \cos(\omega t - 90) = e^{-j90} = \cos 90 - j\sin 90 = -j$$

$$\boxed{A\cos(\omega t + \theta) = Ae^{j\theta}}$$

در حوزه فازور کار می کنیم

گراف :

لینک و درخت :




$$
B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array}
$$

ماتریس همانی از قراردادهای ۱ و ۲

ابتدا برای سلف های تزویج شده :

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}
$$

$\lambda = Li$

$V = L j\omega i$

بردار جریان شاخه ها

$$V_k = V_{sk} + Z_k J_k - Z_k J_{sk}$$

$$V_1 = 4j\omega \times J_1 + 2j\omega \times J_2 + j\omega \times J_3$$

$$V_2 = 2j\omega \times J_1 + 4j\omega \times J_2 + 2j\omega \times J_3$$

$$V_3 = j\omega \times J_1 + 2j\omega \times J_2 + 4j\omega \times J_3$$

$$V_4 = -J + R_1 \times J_4 - R_1 \times 0$$

$$V_5 = 0 + \frac{1}{C_1 j\omega} \times J_5 - \frac{1}{C_1 j\omega} \times 0$$

$$V_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} \times J_6 - \frac{1}{C_2 j\omega} \times (-g_m V_5)$$

$$V_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} J_6 + \frac{g_m}{C_2 j\omega}\left(\frac{1}{C_1 j\omega}\right) J_5 \Rightarrow V_6 = \frac{-g_m}{C_1 C_2 \omega^2} J_5 + \frac{1}{C_2 j\omega} J_6$$

$v_7 = 0 + R_2\, j_7 - R_2 \times 0$

به صورت ماتریسی؟

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4j\omega & 2j\omega & j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2j\omega & 4j\omega & 2j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j\omega & 2j\omega & 4j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1 j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-g_m}{C_1C_2\omega^2} & \frac{1}{C_2 j\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}}_{Z_b} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{Z_b} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{j_s}$$

$Z_B = B Z_b B^t$

$e_s = B Z_b j_s - B V_s$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

۲) روش تحلیلی ⇐ اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله‌ی $Z_B \cdot i = e_s$ ماتریس‌های $Z_B$ و $e_s$ را می‌توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان موجود برداشته باشند و اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند.

۲) سلف تزویج شده و منبع وابسته وجود برداشته باشد.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1L} \\ \vdots & & \\ Z_{L1} & \cdots & Z_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ \vdots \\ e_{s_L} \end{bmatrix}$$

$Z_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع امپدانس‌های موجود در حلقه اساسی } i\text{ ام} \\ i \neq j & \text{مجموع امپدانس‌های مشترک بین حلقه‌ی اساسی } i \text{ و } j \end{cases}$

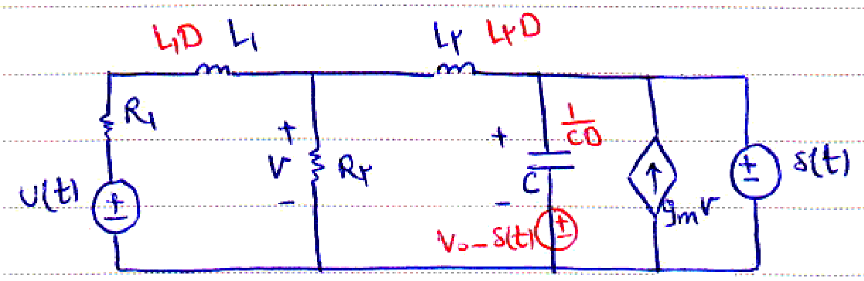
(اگر جهت حلقه‌های اساسی در شاخه‌ی مشترک یکسان بود با علامت مثبت و اگر خلاف بود با علامت منفی جمع می‌زنیم.)

$e_{s_i} =$ مجموع منابع ولتاژ موجود در حلقه‌ی اساسی i (اگر از سر منفی وارد شدیم با علامت + و اگر از سر مثبت وارد شدیم با علامت منفی – جمع می‌زنیم.)

۴) روش مانیسر: همان روش نقرای است.

با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. وابستگی‌ها را حسب جریان حلقه‌ها می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم و معادلات را به روش نقرای می‌نویسیم. در نهایت اثر وابستگی را در ماتریس $Z_B$ برمی‌گردانیم.

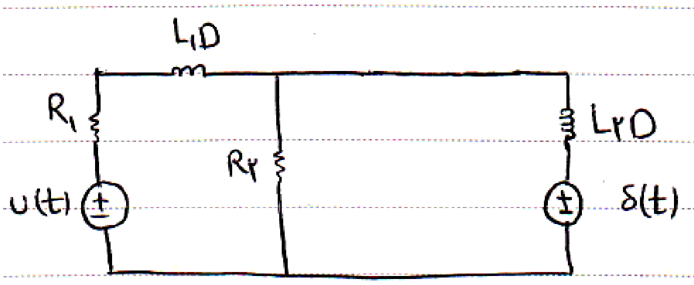
مثال)

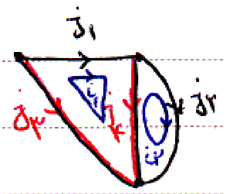



$V_C(0) = V_0$

$i_{L_1}(0) = i_{L_2}(0) = I_0$

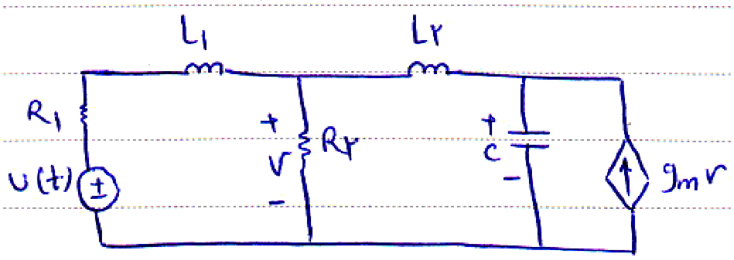
در حوزه‌ی انتگرال–دیفرانسیل حل می‌کنیم:

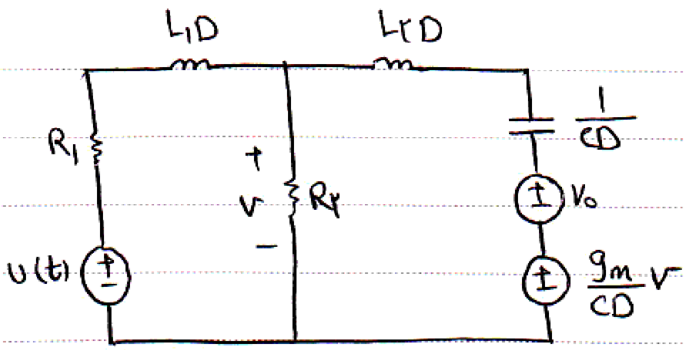


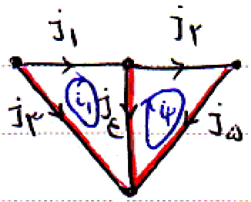




$$\begin{bmatrix} R_1+L_1D+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+L_2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -\delta(t) \end{bmatrix}$$

مثال)






$$v = R_2 i_1 - R_2 i_2$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+L_1D & -R_2 \\ -R_2 + \frac{g_mR_2}{CD} & R_2+L_2D+\frac{1}{CD} - \frac{g_mR_2}{CD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -V_0 - \cancel{\frac{g_mR_2}{CD}i_1} + \cancel{\frac{g_mR_2}{CD}i_2} \end{bmatrix}$$

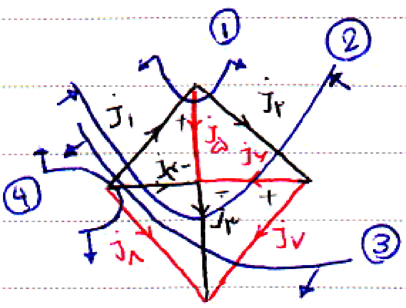
تجزیه و تحلیل کات ست :

با تعیین درخت مناسب در گراف مدار :

قرارداد ۱ : لینک‌ها را از ۱ تا L و شاخه‌ها در درخت را از L+1 تا b شماره گذاری می‌کنیم .

قرارداد ۲ : جهت کات ست را هم جهت با جهت شاخه درخت متناظر در نظر می‌گیریم .

مثال : فرض کنید یک گراف و درخت انتخابی بصورت زیر باشد :




ماتریس Q :

$$Q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات ست } i \text{ بوده و با آن هم جهت باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات ست } i \text{ نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات ست } i \text{ بوده و با خلاف جهت باشد.} \end{cases}$$

در مثال کل ۸ شاخه داریم.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

ماتریس یکه ناشی از قراردادهای ۱ و ۲

استنباطهای KVL و KCL :

بردار جریان شاخه‌ها :
$$j = \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$

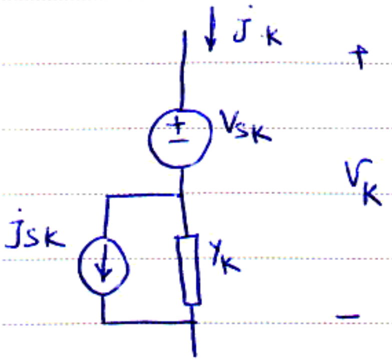
بردار ولتاژ شاخه‌ها :
$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

بردار ولتاژ شاخه‌های درخت :
$$e = \begin{bmatrix} e_{L+1} \\ \vdots \\ e_b \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot j = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_1 + j_2 + j_5 \\ j_1 - j_2 - j_3 + j_4 + j_6 \\ -j_1 + j_3 - j_4 + j_7 \\ j_1 + j_4 + j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow \quad Q \cdot j = 0$ استنباط KCL

$$Q^t \cdot e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} \Longrightarrow Q^t \cdot e = v$$ ، استنباط KVL




معادلات کات ست اساسی ← منظم / نظری / مبانی

منظم:

تعمیم نویسی از شاخه را مجدداً در نظر می‌گیریم.

$$j_k = j_{sk} + Y_k v_k - Y_k v_{sk}$$

وقتی این معادله را برای تمام شاخه‌ها بنویسیم، معادلات ماتریسی زیر حاصل می‌شود:

$$j = j_s + Y_q v - Y_q v_s$$

ضرب طرفین در $Q$:

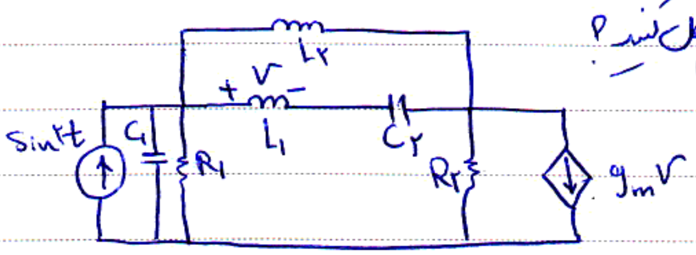
$$\underbrace{Q \cdot j}_{0} = Q j_s + Q Y_q \underbrace{v}_{Q^t \cdot e} - Q Y_q v_s$$

$$\underbrace{Q Y_q Q^t}_{Y_Q} \cdot e = \underbrace{Q Y_q v_s - Q j_s}_{i_s}$$

$Q Y_q v_s$: تبدیل منابع ولتاژ سری به جریان

$$\boxed{Y_Q \cdot e = i_s}$$

مثال) مدار زیر را به روش کات ست اساسی منظم حل کنید؟

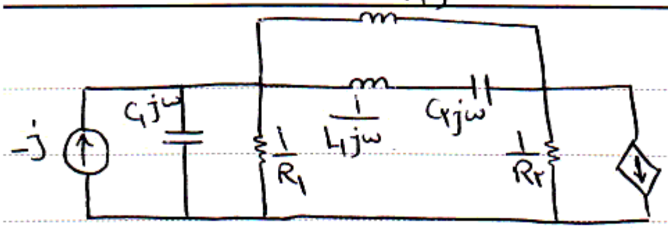



در روش کات ست چون با ادمیتانس سروکار داریم همه را به $Y$ تبدیل می‌کنیم

مثلاً $Z_C = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow Y_C = j\omega C$ و سلف $Z_L = Lj\omega \Rightarrow Y_L = \frac{1}{Lj\omega}$

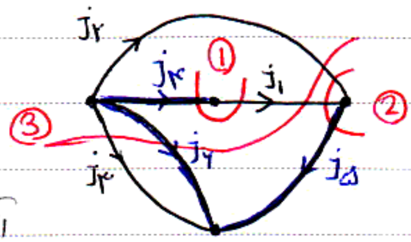
Subject:

Year. Month. Date.




$V_4 = L_1 j\omega \times j_4$

تبدیل به Y ؟




آبی درخت

سیاه لینک

گراف :

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$j_1 = 0 + C_2 j\omega \times V_1 - C_2 j\omega \times 0$$

$$j_2 = 0 + \frac{1}{L_2 j\omega} V_2 - \frac{1}{L_2 j\omega} \times 0$$

$$j_3 = -(-j) + C_1 j\omega \times V_3 - C_1 j\omega \times 0$$

$$j_4 = 0 + \frac{1}{L_1 j\omega} \times V_4 - \frac{1}{L_1 j\omega} \times 0$$

$$j_5 = g_m v + \frac{1}{R_2} V_5 - \frac{1}{R_2} \times 0$$

$$j_5 = g_m \times L_1 j\omega \left( \frac{1}{L_1 j\omega} \right) V_4 + \frac{1}{R_2} V_5 \Longrightarrow j_5 = 0 + g_m V_4 + \frac{1}{R_2} V_5$$

$$-(-j)$$

$$j_6 = 0 + \frac{1}{R_1} V_6 - \frac{1}{R_1} \times 0$$

ادامه بر عهده خودتان

$$j_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_q = \begin{bmatrix} C_2 j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2 j\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 j\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_1 j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_m & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y_Q = Q Y_q Q^t \\ i_s = Q Y_q V_s - Q j_s \end{cases}$$

ادامه بر عهده خودتان

PAPCO

۲ـ روش نودی: اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد می‌توان $Y_Q$ و $i_s$ را مستقیماً تشکیل داد:

۱) منابع ولتاژ موجود نباشند و اگر هستند به منبع جریان تبدیل شوند.

۲) سلف تزویج شده و منبع وابسته نداشته باشیم.

$$Y_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به کات‌ست \lrm{i}ام} \\ i \neq j & \text{مجموع ادمیتانس‌های مشترک کات‌ست‌های \lrm{i} و \lrm{j}} \end{cases}$$

(اگر جهت دو کات‌ست در شاخه‌ی مشترک یکسان بود با علامت مثبت در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم)

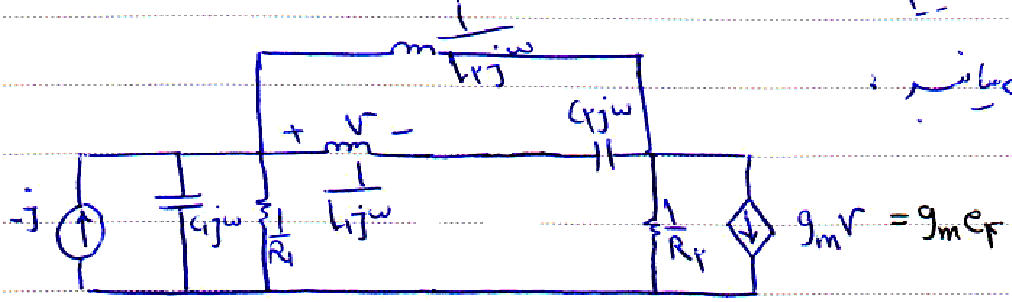
$i_{s_i}$ = مجموع جبری منابع جریان موجود در کات‌ست iام (اگر جهت منبع مخالف جهت کات‌ست بود با علامت مثبت
در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم)

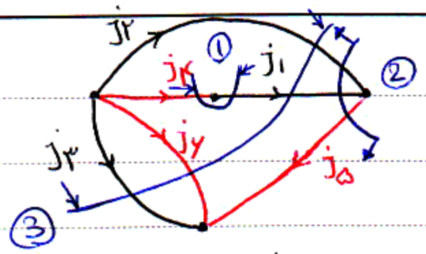
۳ـ روش عیانسر: همان روش نودی است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند.

تمامی وابستگی‌ها را برحسب ولتاژ شاخه‌ها در جهت می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم.

معادلات را به روش نودی می‌نویسیم و در جهت اثر وابستگی را به ماتریس $Y_Q$ می‌بریم.

مثال) مثال قبل به روش عیانسر:






$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1 j\omega}+C_3 j\omega & C_3 j\omega & -C_2 j\omega \\ C_2 j\omega + g_m & \frac{1}{L_2 j\omega}+C_3 j\omega+\frac{1}{R_2} & \frac{-1}{L_2 j\omega}-C_2 j\omega \\ -C_2 j\omega & \frac{-1}{L_2 j\omega}-C_2 j\omega & C_4 j\omega+\frac{1}{R_4}+C_2 j\omega+\frac{1}{L_2 j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{0}{\cancel{-j}} \\ \cancel{-g_m e_4} \\ \underset{-j}{\cancel{0}} \end{bmatrix}$$

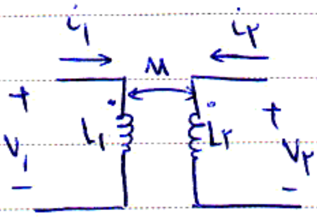
نکات مهم برای حل مسائل:

۱- در روش گره و کات ست اساسی منابع جریان را می توان به تنهایی یک شاخه در نظر گرفت.

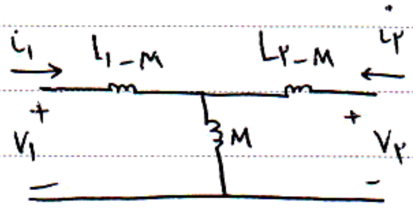
۲- در تجزیه و تحلیل مش و حلقه اساسی منابع ولتاژ را می توان به تنهایی یک شاخه در نظر گرفت.

۳- در تجزیه و تحلیل گره و کات ست و حلقه اساسی، گراف ها می توانند غیر مسطح باشند اما در روش مش خیر.

۴- در روش های ماتریسی گفته بودیم سلف تزویج شده نباید وجود داشته باشد، ولی می توان به جای سلف های تزویج شده مدار معادل قرار داد و از روش ماتریس استفاده کرد.

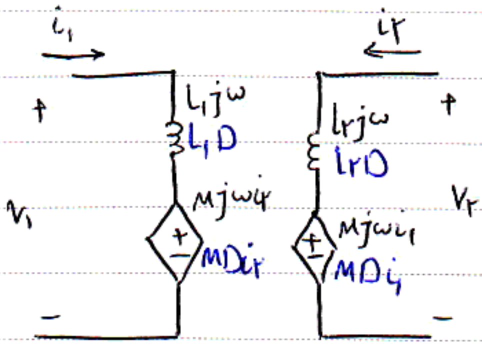



معادل اول: مدار معادل T



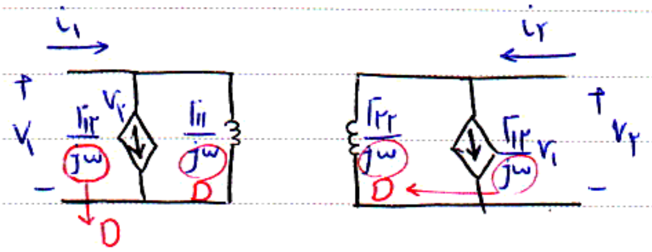
شرط استفاده از این معادل این است که سلف ها در مجاورت هم باشند و یا سر مشترک داشته باشند.

معادل دوم:




کاربرد در روش مش و حلقه اساسی.

معادل سوم:

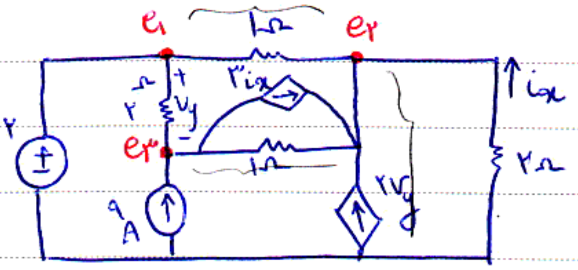



کاربرد در روش گره و کات ست اساسی.

۵ـ در بعضی مدارات در هنگام استفاده از روش های تحلیل منابع مستقلی وجود دارد که قابل تبدیل نیستند یا تبدیل آن ها به سختی انجام می شود. مثلاً منابع جریان در تبدیل های مش و حلقه اساسی و منابع ولتاژ در تبدیل های گره و کات ست اساسی. در این موارد به صورت زیر عمل می کنیم.

الف) در تحلیل های گره و کات ست اساسی، این منابع (منابع ولتاژ)، ولتاژ گره یا ولتاژ یک شاخه درخت اند. در این حالت در روش های تحلیل، ولتاژ مشخص شده را در بردار e قرار می دهیم، سپس سطر مربوط را از ماتریس $Y_n$ یا $Y_Q$ حذف می کنیم.

مثال) حل از روش تحلیل گره




با مدار مربوط $e_2$

$$Y_n \cdot e = I_s \qquad i_x = \frac{-e_2}{2} \longrightarrow 3 i_x = -\frac{3}{2} e_2 \qquad V_y = e_1 - e_3$$

$$\Rightarrow 2V_y = 2e_1 - 2e_3$$

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1-2 & 1+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2} & -1+2 \\ -\frac{1}{2} & -1-\frac{3}{2} & 1+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}e_2 + 2e_1 - 2e_3 \\ -9 + \frac{3}{2} e_2 \end{bmatrix} \qquad 9 + \frac{3}{2} e_2$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{\frac{3}{2}} & \cancel{-1} & \cancel{-\frac{1}{2}} \\ -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$-6 + 4e_2 + e_3 = 0 \longrightarrow 4e_2 + e_3 = 6 \longrightarrow \boxed{e_3 = 6 - 4e_2}$$

$$-1 - \frac{5}{2} e_2 + \frac{3}{2} e_3 = -9 \longrightarrow -2 - 5e_2 + 3e_3 = -18 \longrightarrow \boxed{3e_3 - 5e_2 = -16}$$

$$18 - 12e_2 - 5e_2 = -16 \longrightarrow -17e_2 = -34 \longrightarrow \boxed{e_2 = 2} \qquad e_3 = 6 - 4\times 2 = -2 \rightarrow \boxed{e_3 = -2}$$

$$i_x = -\frac{e_2}{2} = -1$$

ب) در تحلیل های مش و حلقه اساسی، این منابع (منابع جریان)، جریان یک مش یا جریان یک حلقه اساسی اند.

در این حالت در روش های تحلیل، جریان مشخص شده را در بردار $i$ قرار می دهیم، پس سطر مربوطه را از ماتریس $Z_B$ یا $Z_m$ حذف می کنیم.

متغیرهای حالت: کوچکترین دسته از متغیرهای شبکه است به طوریکه بتوان با دانستن آن ها در $t=t_0$ و دانستن منابع در $t>t_0$ بتوان رفتار شبکه را در هر لحظه $t \geq t_0$ تعیین کرد. اگر در دست کم $n$ متغیر حالت $x_1(t), x_2(t), \ldots$ و $x_n(t)$ وجود داشته باشند بردار حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

معادلات حالت: اگر معادلات دیفرانسیل یک شبکه را به صورت زیر بنویسیم می‌گوییم معادلات حالت تشکیل شده.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(\underbrace{x(t)}_{\text{بردار حالت}}, \underbrace{u(t)}_{\text{بردار ورودی های سیستم}}\big) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

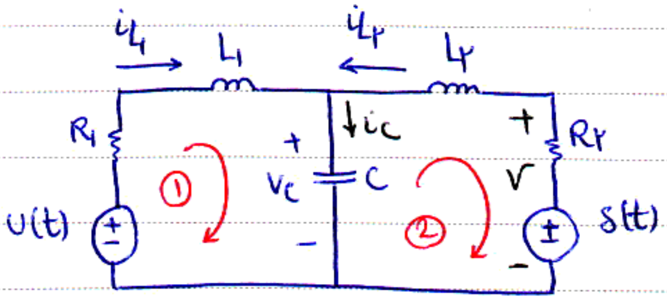
در شبکه های خطی و تغییرناپذیر با زمان:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

خروجی های سیستم

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

مثال) مدار زیر را در نظر بگیرید:




$$KVL\ (1):\quad -u(t) + R_1 i_{L_1} + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + V_C = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{-R_1}{L_1} i_{L_1} - \frac{1}{L_1} V_C + \frac{1}{L_1} u(t)}$$

$$KVL(2):\quad -V_C - L_2\frac{di_{L_2}}{dt} - R_2 i_{L_2} + \delta(t) = 0$$

$$\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{-R_2}{L_2} i_{L_2} - \frac{1}{L_2}V_C + \frac{1}{L_2}\delta(t)$$

$$KCL:\quad i_{L_1} + i_{L_2} = C\frac{dV_C}{dt} \longrightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C}i_{L_1} + \frac{1}{C}i_{L_2}$$

در اساس این معادلات می‌توان بردار حالت را به صورت زیر نقش کرد:

خروجی سیستم به صورت روبرو است:

$$V = -R_2 i_{L_2} + \delta(t)$$

حال:

$$\dot{x} = Ax + BU \qquad y = Cx + DU$$

بردار ورودی‌ها — بردار خروجی‌ها

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{V}_C \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ V_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} U(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

$$V = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -R_2 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ V_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} U(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

به طور کلی اگر در یک سیستم، n متغیر حالت، m ورودی و k خروجی داشته باشیم، ابعاد ماتریس‌های فضای حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$[\dot{x}]_{n\times1} = [A]_{n\times n}[x]_{n\times1} + [B]_{n\times m}[U]_{m\times1}$$

$$[y]_{k\times1} = [C]_{k\times n}[x]_{n\times1} + [D]_{k\times m}[U]_{m\times1}$$

کات ست یک درخت یعنی لینک
حلقه یک لینک یعنی درخت

سلف باید لینک باشد. باید خازن درخت باشد

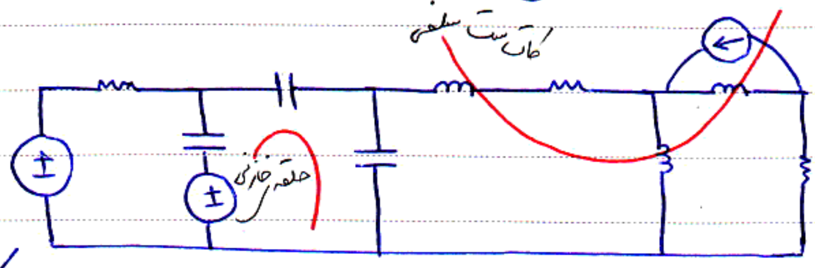
Subject:
Year. Month. Date. ( )

## الگوریتم معادلات حالت :

۱- انتخاب متغیرهای حالت : براساس عناصر ذخیره کننده انرژی انجام می‌شود. در مدارهای الکتریکی، معمولاً جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می‌شوند. به طور مشابه می‌توان شار سلف‌ها و بار خازن‌ها را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب نمود.

۲- انتخاب درخت مناسب : درختی انتخاب می‌کنیم که شامل خازن‌ها بوده و شامل سلف‌ها نباشد.

سوال: آیا همیشه این امکان پذیر است؟ خیر، در شرایطی که حلقه خازنی داریم، یکی از خازن‌ها را درخت انتخاب نمی‌کنیم، همچنین در شرایطی که کات ست سلفی داریم یکی از سلف‌ها را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه به تعداد حلقه‌های خازنی و کات ست‌های سلفی از معادلات حالت کم می‌شود. حلقه خازنی و کات ست سلفی را با کشتن منابع مستقل می‌توان تشخیص داد.

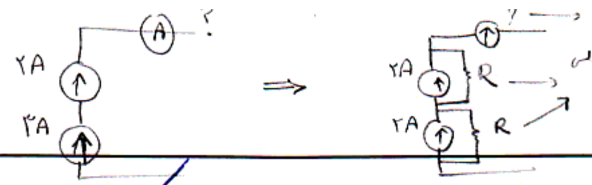



تعداد عناصر ذخیره کننده ۶ و تعداد کات ست سلفی : ۱ تعداد حلقه خازنی : ۱ تعداد متغیرهای حالت ۶-۱-۱=۴

۳- KCL را در کات ست‌های خازنی می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که برحسب متغیرهای حالت نوشته شود.

۴- KVL را در حلقه‌های اساسی شامل سلف‌ها می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که برحسب متغیرهای حالت نوشته شود.

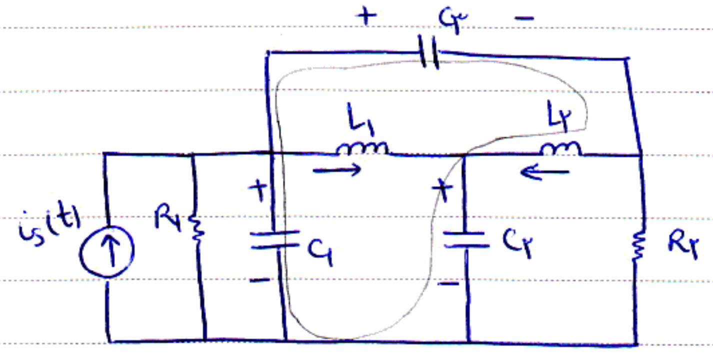
Subject:
Year. Month. Date. ( )

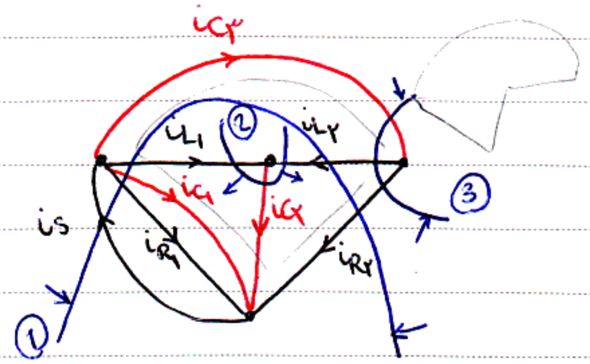



۵- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴ اگر این متغیر غیرحالت، متغیر یک لینک بود، حلقه اساسی را در آن لینک می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

۶- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴، درصورتیکه این متغیر مربوط به یک شاخه درخت بود، کات ست اساسی را در آن شاخه درخت می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

مثال) معادلات حالت مدار زیر؟




منبع جریان را به عنوان یک شاخه مستقل در نظر می‌گیریم

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix}$$

$$\text{KCL (1)}: \quad i_{L_1} + i_{L_2} + C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + i_{R_1} - i_s + i_{R_2} = 0$$

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{-1}{C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} i_{L_2} - \frac{1}{C_1} \overset{\text{غیرحالت}}{i_{R_1}} - \frac{1}{C_1} \overset{\text{غیرحالت}}{i_{R_2}} + \frac{1}{C_1} i_s \quad (1)$$

$$\text{KCL (2)}: \quad C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} - i_{L_1} - i_{L_2} = 0 \longrightarrow \frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{L_1} + \frac{1}{C_2} i_{L_2}$$

غیرحالت

$$\text{KCL}(3): \; C_3 \frac{dv_{C_3}}{dt} - i_{L_2} - i_{R_2} = 0 \longrightarrow \frac{dv_{C_3}}{dt} = \frac{1}{C_3} i_{L_2} + \frac{1}{C_3} i_{R_2} \quad ②$$

$$\text{KVL}(1): \; L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_{C_2} - v_{C_1} = 0 \longrightarrow \frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{1}{L_1} v_{C_1} - \frac{1}{L_1} v_{C_2}$$

$$\text{KVL}(2): \; L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + v_{C_2} - v_{C_1} + v_{C_3} = 0 \longrightarrow \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{1}{L_2} v_{C_1} - \frac{1}{L_2} v_{C_2} - \frac{1}{L_2} v_{C_3}$$

$$\text{KVL}: \; R_1 i_{R_1} - v_{C_1} = 0 \longrightarrow i_{R_1} = \frac{v_{C_1}}{R_1}$$

حذف غیرحالت ، $i_{R_1}$

$$\text{KVL}: \; R_2 i_{R_2} - v_{C_1} + v_{C_3} = 0 \longrightarrow$$

حذف غیرحالت ، $i_{R_2}$

$$i_{R_2} = \frac{1}{R_2} v_{C_1} - \frac{1}{R_2} v_{C_3}$$

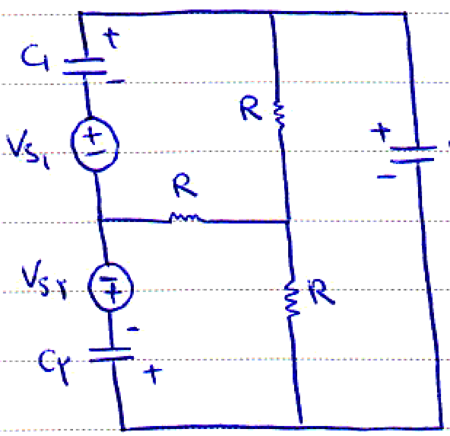
بازنویسی ① و ②

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} i_{L_2} - \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_{C_1} - \frac{1}{R_2} v_{C_3} + \frac{1}{C_1} i_s$$

$$\frac{dv_{C_3}}{dt} = \frac{1}{C_3} i_{L_2} + \frac{1}{C_3} \frac{v_{C_1}}{R_2} - \frac{1}{C_3 R_2} v_{C_3}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{v}_{C_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & \frac{-1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{-1}{L_2} & \frac{-1}{L_2} \\ \frac{-1}{C_1} & \frac{-1}{C_1} & \frac{-1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & 0 & \frac{-1}{R_2} \\ \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_3 R_2} & 0 & \frac{-1}{C_3 R_2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} i_s(t)$$

مثال) قبلاً گفتیم اگر متغیرهای حالت جبراً هم نوشته شوند از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود مانند حلقه خازنی که روبروست



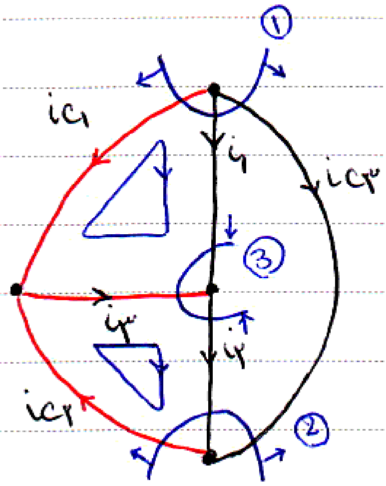

حل:

$$V_{C2}+V_{S2}-V_{S1}-V_{C1}+V_{C3}=0$$

$$V_{C3}=V_{C1}-V_{C2}+V_{S1}-V_{S2}$$

یعنی از متغیرهای حالت یکی کم می‌شود. از بین سه متغیر موجود

۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.




$$x=\begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

غیرحالت   غیرحالت

$$KCL(1):\quad C_1\frac{dV_{C1}}{dt}+i_1+i_{C3}=0 \longrightarrow \dot V_{C1}=\frac{-1}{C_1}i_1-\frac{1}{C_1}i_{C3} \quad ①$$

غیرحالت   غیرحالت

$$KCL(2):\quad C_2\frac{dV_{C2}}{dt}-i_2-i_{C3}=0 \longrightarrow \dot V_{C2}=\frac{1}{C_2}i_2+\frac{1}{C_2}i_{C3} \quad ②$$

حذف غیرحالت $i_1$ : $i_1$ متغیر لینک است حلقه اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL:\quad Ri_1-Ri_3-V_{S1}-V_{C1}=0 \longrightarrow i_1=i_3+\frac{1}{R}V_{C1}+\frac{1}{R}V_{S1} \quad (A)$$

غیرحالت

تنها مربوط به یک شاخه درخت است. کات ست اساسی این شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(3):\quad i_3+i_1-i_2=0 \longrightarrow i_3=i_2-i_1$$

جانشینی در (A)

$$2i_1 = i_2 + \frac{1}{R}V_{C_1} + \frac{1}{R}V_{S_1}$$

عدم حالت

$$\rightarrow \boxed{i_1 = \frac{1}{2} i_2 + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}} \quad (B)$$

$i_2$ متغیر لینک است. حلقه اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL(2):\ Ri_2 + V_{C_2} + V_{S_2} + Ri_3 = 0 \rightarrow i_2 = \underbrace{-i_3}_{i_1-i_2} - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2}$$

$$2i_2 = i_1 - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2} \rightarrow \boxed{i_2 = \frac{1}{2} i_1 - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}} \quad (C)$$

جانشینی (C) در (B):

$$i_1 = \frac{1}{4} i_1 - \frac{1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\frac{3}{4} i_1 = \frac{-1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\boxed{i_1 = \frac{-1}{3R}V_{C_2} - \frac{1}{3R}V_{S_2} + \frac{2}{3R}V_{C_1} + \frac{2}{3R}V_{S_1}} \quad (E)$$

با جانشینی (E) در (C)، $i_2$ نیز برحسب متغیرهای حالت بیان می‌شود.

$$i_2 = \frac{-1}{6R}V_{C_2} - \frac{1}{6R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{C_1} + \frac{1}{3R}V_{S_1} - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}$$

$$\boxed{i_2 = \frac{1}{3R}V_{C_1} - \frac{2}{3R}V_{C_2} - \frac{2}{3R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{S_1}} \quad (F)$$

$i_1$ و $i_2$ طبق روابط E و F، هر دو به حالت تبدیل شوند.

حذف عدم حالت $i_{C_3}$:

$$V_{C_3} = V_{C_1} - V_{C_2} + V_{S_1} - V_{S_2}$$

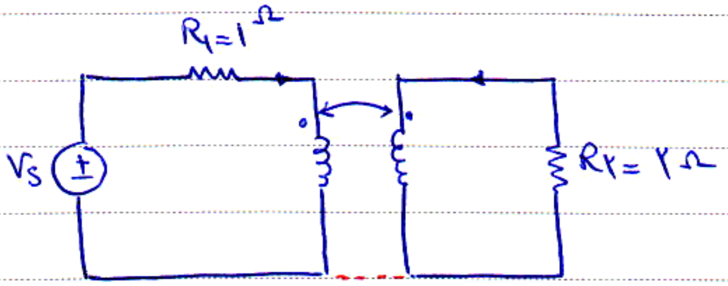
؛ داشتیم

$$i_{C_3} = C_3 \dot{v}_{C_3} \longrightarrow i_{C_3} = C_3 \dot{v}_{C_1} - C_3 \dot{v}_{C_2} + C_3 \dot{v}_{S_1} - C_3 \dot{v}_{S_2} \quad (9)$$

با جایگذاری 9 در ① و ② و استفاده از سایر روابط ماتریسی شده، معادلات حالت به دست می‌آید. ادامه به عهده دانشجو.

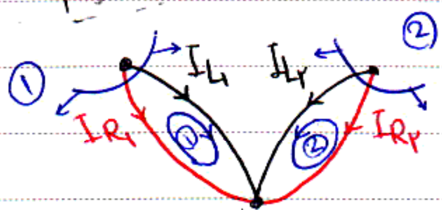
مثال)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$




خودمان جسی در نظر می‌گیریم

گراف:




برای هر یک از سلف‌ها حلقه اساسی را می‌نویسیم.

$$\lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \xrightarrow{d/dt} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$KVL\ (1):\quad 1 \times \frac{dI_{L_1}}{dt} + 1\,\frac{dI_{L_2}}{dt} - V_s - 1 \times I_{R_1} = 0$$

غیرحالت

$$\dot{I}_{L_1} + \dot{I}_{L_2} = I_{R_1} + V_s \quad ①$$

غیرحالت

$$KVL(2):\quad 2\,\frac{dI_{L_2}}{dt} + 1 \times \frac{dI_{L_1}}{dt} - 2 I_{R_2} = 0 \longrightarrow 2\dot{I}_{L_2} + \dot{I}_{L_1} = 2 I_{R_2} \quad ②$$

حذف غیرحالت $i_{R_1}$ : $i_{R_1}$ تعریف شاخه درخت است، کات‌ست اساسی متناظر با آن شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(1):\quad I_{L_1} + I_{R_1} = 0 \longrightarrow I_{R_1} = -I_{L_1} \quad (A)$$

حذف غیرحالت $I_{R_2}$: متغیر یک شاخه درخت است، کات ست اساسی آن را می‌نویسیم.

$$KCL\ (2):\quad I_{L_2}+I_{R_2}=0 \longrightarrow \boxed{I_{R_2}=-I_{L_2}} \quad (B)$$

جایگذاری (A) در (1) و (B) در (2)،

$$\begin{cases} \dot I_{L_1}+\dot I_{L_2}=-I_{L_1}+V_s \longrightarrow \dot I_{L_1}=-I_{L_1}-\dot I_{L_2}+V_s & (3) \\ 2\dot I_{L_2}+\dot I_{L_1}=-2I_{L_2} & (4) \end{cases}$$

جایگذاری (3) در (4):

$$2\dot I_{L_2}-I_{L_1}-\dot I_{L_2}+V_s=-2I_{L_2} \longrightarrow \boxed{\dot I_{L_2}=I_{L_1}-2I_{L_2}-V_s} \quad (5)$$

جایگذاری (5) در (3):

$$\dot I_{L_1}=-I_{L_1}-I_{L_1}+2I_{L_2}+V_s+V_s$$

$$\boxed{\dot I_{L_1}=-2I_{L_1}+2I_{L_2}+2V_s} \quad (6)$$

از (5) و (6):

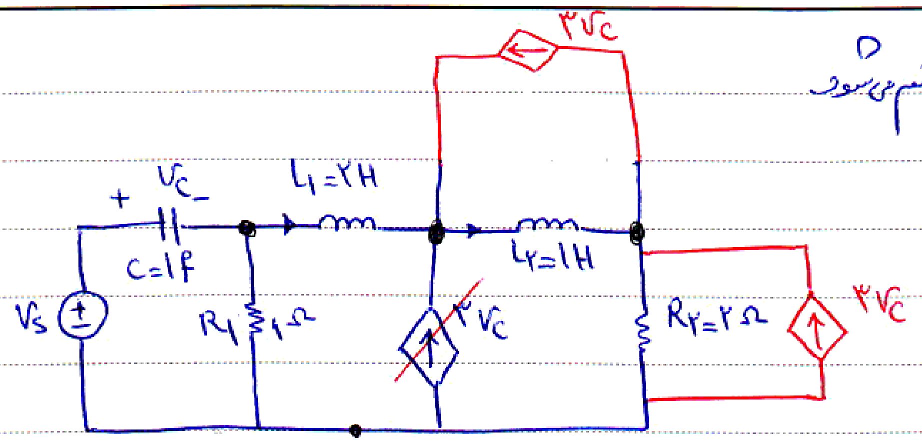
$$\begin{bmatrix}\dot I_{L_1}\\ \dot I_{L_2}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}I_{L_1}\\ I_{L_2}\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}}_{B}V_s$$

نکته) در شرایطی که حلقه خازنی و کات ست سلفی داشته باشیم به دلیل اینکه متغیرهای حالت بر حسب هم نوشته می‌شوند، از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود.

گاهی منابع وابسته نیز علاوه بر شرایط فوق، ممکن است متغیرهای حالت را برحسب هم بیان کنند، در این صورت

باز هم از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود

مثال)




تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی ۳ است. به نظر می‌رسد ۳ متغیر حالت داشته باشیم ولی از دقت کنیم مشاهده می‌کنیم که

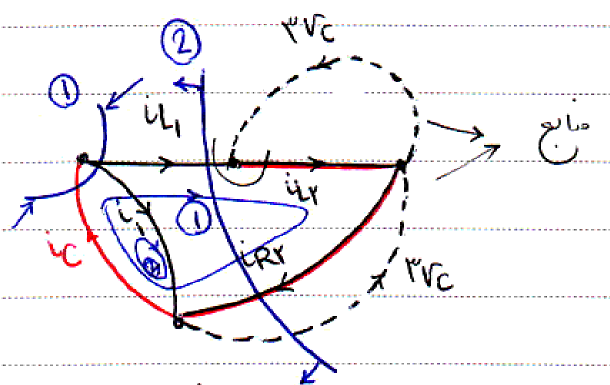
$$kcl: \quad 3V_C = i_{L_2} - i_{L_1}$$

یعنی یکی از متغیرهای حالت برحسب بقیه بیان می‌شود در نتیجه ۲ متغیر حالت داریم. از ۳ متغیر موجود ۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم

$$x = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ V_C \end{bmatrix}$$

حال متغیرهای حالت را بدست می‌آوریم:

گراف:




$$Kcl\ (1): \quad C\frac{dV_C}{dt} - i_1 - i_{L_1} = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{V_C} = \frac{1}{C} i_{L_1} + \frac{1}{C} i_1} \quad (1)$$

غیرحالت

$$KVL\ (1): \quad L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + R_2 i_{R_2} - V_s + V_C = 0$$

غیرحالت

$$\boxed{L_1 \dot{i}_{L_1} + L_2 \dot{i}_{L_2} + R_2 i_{R_2} - V_s + V_C = 0} \quad (2)$$

غیرحالت

حذف غیرحالت‌ها $i_1$ : $i_1$ متغیر لینک است، حلقه اساسی آن را می‌نویسیم.

$$KVL(2):\ R_1 i_1 - V_s + V_c = 0 \longrightarrow \boxed{i_1 = \frac{-1}{R_1}V_c + \frac{1}{R_1}V_s} \quad (A)$$

حذف غیرحالت‌ها $i_{R_2}$ : $i_{R_2}$ متغیر شاخه درخت است. کات ست اساسی این شاخه را می‌نویسیم.

$$kcl(2):\ i_{R_2} - i_{L_1} - 3V_c = 0 \longrightarrow i_{R_2} = i_{L_1} + 3V_c \quad (B)$$

حذف غیرحالت $i_{L_2}$ :

داشتیم : $i_{L_2} = i_{L_1} + 3V_c \longrightarrow \boxed{\dot i_{L_2} = \dot i_{L_1} + 3\dot V_c} \quad (C)$

جاگذاری (A)، (B)، (C) در (1) و (2)

$$\boxed{\dot V_c = \frac{1}{C} i_{L_1} - \frac{1}{R_1C} V_c + \frac{1}{CR_1} V_s} \quad (3)$$

$$L_1 \dot i_{L_1} + L_2 \dot i_{L_1} + 3L_2 \dot V_c + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_c - V_s + V_c = 0$$

$$(L_1+L_2)\dot i_{L_1} + \underbrace{\frac{3L_2}{C} i_{L_1} - \frac{3L_2}{R_1C} V_c + \frac{3L_2}{R_1C} V_s}_{3L_2\dot V_c} + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_c - V_s + V_c = 0$$

$$\boxed{(L_1+L_2)\dot i_{L_1} + \left(\frac{3L_2}{C} + R_2\right) i_{L_1} + \left(1 + 3R_2 - \frac{3L_2}{R_1C}\right)V_c + V_s\left(\frac{3L_2}{R_1C} - 1\right)V_s = 0}$$

عددگذاری :

$$\boxed{\dot V_c = i_{L_1} - V_c + V_s}$$

$$3\dot i_{L_1} + 5 i_{L_1} + 4V_c + 2V_s = 0 \longrightarrow \boxed{\dot i_{L_1} = -\frac{5}{3} i_{L_1} - \frac{4}{3} V_c - \frac{2}{3} V_s}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} v_s$$

نکته) در صورت لزوم می‌توان منابع را به عنوان یک شاخه مستقل در نظر گرفت ، در این صورت سعی می‌شود منابع ولتاژ جزء شاخه‌های درخت و منابع جریان جزء لینک‌ها باشند.

## فصل ۱۳ : تبدیلات لاپلاس

از این روش برای تحلیل مدارات خطی و تغییر ناپذیر با زمان استفاده می‌شود.

ابتدا مروری بر روابط لاپلاس :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\cos \beta t] = \frac{s}{s^2+\beta^2} \qquad \mathcal{L}[\sin \beta t] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n \qquad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

مثال)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3!} \cdot \frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{6} t^3$$

* در بسیاری از مواقع، معکوس گیری از لاپلاس و یا لاپلاس گیری از توابع از خواص تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود.

مروری بر خواص :

۱)

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right] = F(s-\alpha)$$

مثال)

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t} \cos(3t)\right] = ?$$

$$\mathcal{L}[\cos(3t)] = \frac{s}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos 3t\right] = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$$L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(S) \qquad (۲$$

مثال)
$$L\left[t^2 e^{3t}\right] = ? \quad (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-3)^2}\right) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = SF(S) - f(0^-) \qquad (۳$$

$2 = 2\times(1) \longrightarrow L\{\delta(t)\}$

علامت ضربه دارد.

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(S) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f(0^-) - \dots - s f(0^-) - f(0^-) \qquad (۴$$

مشتقات ضربه $\quad L\left[\delta^{(n)}(t)\right] = s^n$

نکته: باید هنگام استفاده از قاعده مشتق گیری، ضربه‌های ناشی از $f(0^-)$ ظاهر می‌شود را فراموش نکرد.

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی:

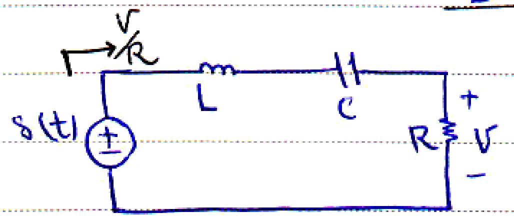
قضیه مقدار نهایی:
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(S)$$

قضیه مقدار اولیه:
$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(S)$$

شرایط اولیه صفر

یادآوری: پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار همان پاسخ حالت صفر است.

مثال) در مدار زیر با استفاده از تبدیل لاپلاس، پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید. (تابع تبدیل سیستم؟)




پاسخ ضربه ⟸

شرایط اولیه صفر

هدف به دست آوردن $v$ است.

$$\delta(t) = L\frac{d}{dt}\left[\frac{v}{R}\right] + \frac{1}{C}\int \frac{v}{R}\,dt + \cancel{v_c(0)} + v$$

$$\delta(t) = \frac{L}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}\int v\,dt + v \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 = \frac{L}{R}\left[sV(s) - \cancel{v(0^-)}\right] + \frac{1}{RCs}V(s) + V(s)$$

$$1 = V(s)\left[\frac{Ls}{R} + \frac{1}{RCs} + 1\right]$$

$$1 = V(s)\left[\frac{LCs^2 + 1 + RCs}{RsC}\right] \longrightarrow V(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + 1 + RCs} \Rightarrow V(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

* برای به دست آوردن پاسخ در حوزه زمان باید معکوس تبدیلی از لاپلاس را انجام داد.

بسط به کسرهای جزئی:

$$F(S) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad m \leq n$$

ریشه‌های صورت $\quad P(S) = 0 \xrightarrow{\text{صفرها}} z_1, z_2, \dots, z_m$

ریشه‌های مخرج $\quad Q(S) = 0 \xrightarrow{\text{قطب‌ها}} p_1, p_2, \dots, p_n$

۱- قطب‌ها حقیقی و ساده

$$Q(s) = (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\dots(s-p_n)$$

$$F(S) = \sum_{j=1}^{n}\frac{K_j}{(s-p_j)} \qquad K_j = (s-p_j)F(s)\Big|_{s=p_j}$$

مثال)

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2}{s+2}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_2 = (s+2)F(s)\Big|_{s=-2} = \frac{2}{s+1}\Big|_{s=-2} = -2$$

$$f(t) = \left[2e^{-t} - 2e^{-2t}\right]u(t)$$

۲ـ قطب‌ها حقیقی ولی تکراری:

$$Q(s) = (s-p_1)^{n_1}(s-p_2)^{n_2}(s-p_3)^{n_3}\cdots(s-p_r)^{n_r}$$

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s-p_1)} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{K_{1n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} +$$

$$\frac{K_{21}}{(s-p_2)} + \frac{K_{22}}{(s-p_2)^2} + \cdots + \frac{K_{2n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} +$$

$$\vdots$$

$$\frac{K_{r1}}{(s-p_r)} + \frac{K_{r2}}{(s-p_r)^2} + \cdots + \frac{K_{rn_r}}{(s-p_r)^{n_r}}$$

$$K_{in_i} = (s-p_i)^{n_i} F(s)\Big|_{s=p_i}$$

$$K_{i\,n_i-1} = \frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^{n_i} F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$K_{i\,n_i-2} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_i)^{n_i} F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$K_{i\,n_i-3} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3}\left[(s-p_i)^{n_i} F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$\vdots$$

مثال:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3 s^2}$$

$$= \frac{K_{11}}{(s+1)} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} + \frac{K_{21}}{s} + \frac{K_{22}}{s^2}$$

$$K_{13} = (s+1)^3 F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 F(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{-2}{s^3}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_{11} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 F(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{s^3}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{3}{s^4}\Big|_{s=-1} = 3$$

$$K_{22} = \left[s^2 F(s)\right]\Big|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)^3}\Big|_{s=0} = 1$$

$$K_{21} = \frac{d}{ds}\left[s^2 F(s)\right]\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right]\Big|_{s=0} = \frac{-3}{(s+1)^4}\Big|_{s=0} = -3$$

$$f(t) = \left[3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + t - 3\right]u(t)$$

۳ـ قطب‌ها زوج:

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{K_2}{s-(\alpha-j\beta)}$$

تمرین) نشان دهید $K_1$ و $K_2$ زوج مزدوجند.

$$K_1 = |K| \angle \theta_K$$

$$K_2 = |K| \angle -\theta_K \qquad F(s) = \frac{K}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{K^*}{(s-(\alpha-j\beta))}$$

$$f(t) = Ke^{(\alpha+j\beta)t} + K^* e^{(\alpha-j\beta)t}$$

$$f(t) = |K| e^{j\theta_K} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{j\beta t} + |K| e^{-j\theta_K} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{-j\beta t}$$

$$f(t) = |K|\, e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta_K)} + e^{-j(\beta t+\theta_K)}\right]$$

$$\boxed{f(t) = 2|K|\, e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_K)}$$

مثال) $F(S) = \dfrac{s^2+3s+7}{(s^2+4s+8)(s+1)}$ $\quad P: -2+2j\,,\ -2-2j\,,\ -1$

$$F(S) = \frac{K}{(S-(-2+2j))} + \frac{K^*}{(S-(-2-2j))} + \frac{K_1}{S+1}$$

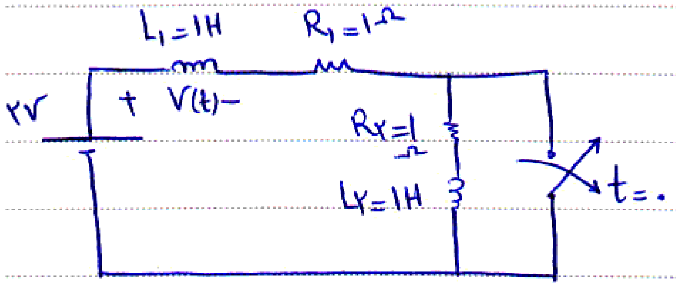
$$K = (S-(-2+2j))\,F(S)\Big|_{S=-2+2j} = \frac{(-2+2j)^2+3(-2+2j)+7}{(-2+2j+2+2j)(-2+2j+1)} = \frac{j}{4} = \frac{1}{4}\angle 90$$

$$\begin{cases} |K| = \dfrac{1}{4} \\ \theta_K = 90 \end{cases}$$

$$K_1 = (S+1)\,F(S)\Big|_{S=-1} = \frac{s^2+3s+7}{s^2+4s+8}\Big|_{S=-1} = 1$$

$$\longrightarrow f(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(2t+90) + e^{-t}\right]u(t)$$

مثال) در مدار زیر با استفاده از آنالیز در حوزه لاپلاس، $V(t)$ را بدست آورید.




توضیحی در مورد مدارهای کلیددار:

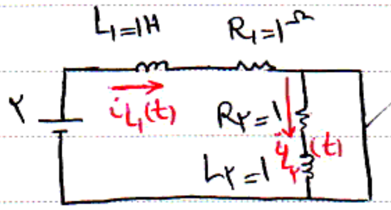
اگر در لحظه $t = t_0$ کلید تغییر وضعیت دهد آنالیز را به دو مرحله زیر انجام می‌دهیم:

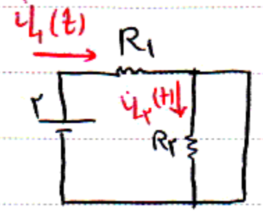
۱) $t \le t_0$ فرض می‌شود که مدار در وضعیت پایدار خود قرار دارد، یعنی در رژیم DC، سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها اتصال باز فرض می‌شوند و اگر در رژیم سینوسی باشیم از فازور استفاده می‌کنیم.

۲) $t=t_0$ در معادلات بخش قبل با قرار دادن $t=t_0$ شرایط اولیه را از مرحله قبل به دست می‌آوریم.

۳) $t>t_0$ با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادلات حاکم بر مدار را به دست می‌آوریم.

حل مثال) $t \le t_0$



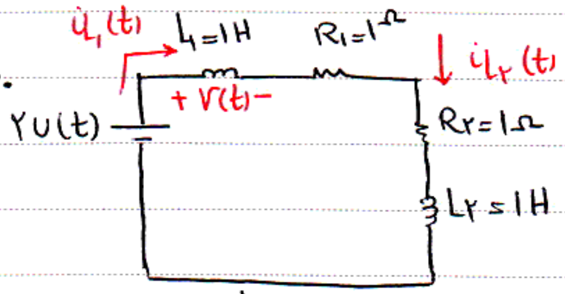




$$i_{L_1}(t)=\frac{2}{R_1}=\frac{2}{1}=2A \quad , \quad i_{L_2}(t)=0 \quad , \quad v(t)=0$$

اتصال کوتاه

$$t=0 \longrightarrow \begin{cases} i_{L_1}(0)=2 \\ i_{L_2}(0)=0 \end{cases}$$

$t>t_0$




$$KVL: \quad 2u(t)=L_1\frac{di_{L_1}(t)}{dt}+R_1 i_{L_1}(t)+R_2 i_{L_2}(t)+L_2\frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$2u(t)=\frac{di_{L_1}(t)}{dt}+i_{L_1}(t)+i_{L_2}(t)+\frac{di_{L_2}(t)}{dt}$$

نکته: اگرچه $i_{L_1}(t)=i_{L_2}(t)$ اما چون شرایط اولیه آن‌ها فرق می‌کند از مساوی قرار دادن آن‌ها حاصل از انتگرال به

چون در لاپلاس رهنمون می‌شویم.

به حوزه لاپلاس می‌بریم:

$$\frac{2}{s} = sI_{L_1}(s) - \underbrace{i_{L_1}(0^-)}_{2} + I_{L_1}(s) + I_{L_2}(s) + sI_{L_2}(s) - \underbrace{i_{L_2}(0^-)}_{0} \qquad I_{L_1}(s) = I_{L_2}(s) \triangleq I_L(s)$$

$$\frac{2}{s} = I_L(s)(2s+2) - 2 \rightarrow \frac{2}{s} + 2 = 2I_L(s)(s+1)$$

$$\frac{2(s+1)}{s} = 2(s+1)I_L(s) \rightarrow I_L(s) = \frac{1}{s}$$

نکته: تا رسیدن به جواب نهایی، استفاده از حوزه لاپلاس را ادامه می‌دهیم.

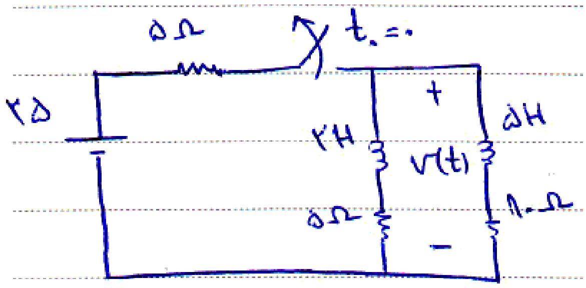
$$\begin{cases} i_{L_1}(t) = u(t) \\ v(t) = L_1 \dfrac{di_{L_1}(t)}{dt} = 1 \times \dfrac{d}{dt}(u(t)) = \delta(t) \end{cases} \quad \times \quad \text{اشتباه}$$

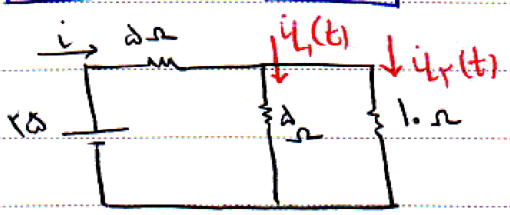
حالا:

$$v(t) = L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \xrightarrow{L} V(s) = L_1\left(sI_L(s) - i_{L_1}(0)\right) = 1 \times \left(s \times \frac{1}{s} - 2\right) = -1$$

$$V(s) = -1 \rightarrow \boxed{v(t) = -\delta(t)}$$

مثال) مدار زیر را با استفاده از آنالیز در حوزه لاپلاس کامل کرده و $v(t)$ را به دست آورید؟



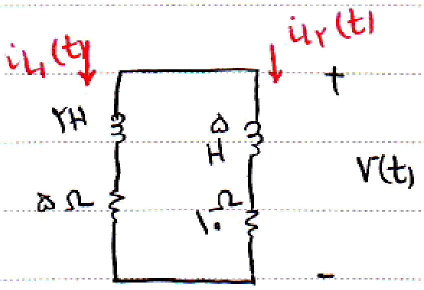

$t < 0$

$$i=\frac{25}{5+(5\|10)}=3A \qquad i_{L_1}(t)=3\times\frac{10}{15}=2A \qquad i_{L_2}(t)=3\times\frac{5}{15}=1A$$

$t=0$

$$i_{L_1}(0^-)=2A \;,\; i_{L_2}(0^-)=1A$$

$t>0$




$$KVL: \; 2\frac{di_{L_1}(t)}{dt}+5i_{L_1}(t)-10i_{L_2}(t)-5\frac{di_{L_2}(t)}{dt}=0$$

$$\xrightarrow{L} 2\left[sI_{L_1}(s)-i_{L_1}(0^-)\right]+5I_{L_1}(s)-10I_{L_2}(s)-5\left[sI_{L_2}(s)-i_{L_2}(0^-)\right]=0$$

$$i_{L_2}(0^-)=2 \;,\; i_{L_2}(0^-)=1 \;,\; I_{L_2}(s)=-I_{L_1}(s)$$

$$2sI_{L_1}(s)-4+5I_{L_1}(s)+10I_{L_1}(s)+5sI_{L_1}(s)+5=0$$

$$I_{L_1}(s)\,(7s+15)=-1 \Rightarrow I_{L_1}(s)=\frac{-1}{7s+15}=\frac{-1/7}{s+\frac{15}{7}}$$

$$\begin{cases} i_{L_1}(t)=\frac{-1}{7}e^{-\frac{15}{7}t}\,u(t) \\ i_{L_2}(t)=\frac{1}{7}e^{-\frac{15}{7}t}\,u(t)\end{cases} \qquad i_{L_1}(0^+)=-\frac{1}{7} \;,\; i_{L_2}(0^+)=\frac{1}{7}$$

دقت کنید جریان سلف‌ها تغییر ناگهانی داشته، یعنی در ولتاژ دو سر آن‌ها ایجاد ضربه خواهد شد.

$$V(t)=2\frac{di_{L_1}(t)}{dt}+5i_{L_1}(t)$$

دقت کنید که از هم از $i_{L_1}(t)$ مستقیماً استفاده نکنیم. به حوزه لاپلاس می‌بریم.

$$V(s) = ۲\left[s I_{L_1}(s) - i_{L_1}(0^-)\right] + ۵ I_{L_1}(s)$$

$$V(s) = (۲s+۵) I_{L_1}(s) - ۴ \longrightarrow V(s) = \frac{-(۲s+۵)}{۷s+۱۵} - ۴ = \frac{-۲s-۵-۲۸s-۶۰}{۷s+۱۵}$$

$$V(s) = \frac{-۳۰s-۶۵}{۷s+۱۵}$$

حال لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$F(s) = \frac{-۳۰}{۷s+۱۵} = \frac{-۳۰/۷}{s+۱۵/۷} \xrightarrow{L^{-1}}$$

$$\frac{-۳۰}{۷} e^{-۱۵/۷\, t} u(t) = f(t)$$

طبق خواص داشتیم که:

$$sF(s) - f(0^-) \xrightarrow{L^{-1}} \frac{df(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow sF(s) \xrightarrow{L^{-1}} \frac{df(t)}{dt} + f(0^-)$$

$$\frac{-۳۰s}{۷s+۱۵} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{d}{dt}\left(\frac{-۳۰}{۷} e^{-۱۵/۷\, t} u(t)\right) - \frac{۳۰}{۷} e^{-۱۵/۷ \times 0} u(0^-) =$$

$$\frac{-۳۰}{۷} \times \left(-\frac{۱۵}{۷}\right) e^{-۱۵/۷\, t} u(t) \underbrace{- \frac{۳۰}{۷} e^{-۱۵/۷\, t} \delta(t)}_{-\frac{۳۰}{۷}\delta(t)}$$

$* \; f(t)\,\delta(t-T_0) = f(T_0)\,\delta(t-T_0)$

$$\begin{cases} -\dfrac{۳۰s}{۷s+۱۵} \xrightarrow{L^{-1}} \dfrac{۴۵۰}{۴۹} e^{-۱۵/۷\, t} u(t) - \dfrac{۳۰}{۷}\delta(t) \\[2ex] \dfrac{-۶۵}{۷s+۱۵} \xrightarrow{L^{-1}} \dfrac{-۶۵}{۷} e^{-۱۵/۷\, t} u(t) \end{cases}$$

$$v(t)=\frac{450}{49}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)-\frac{30}{7}\delta(t)-\frac{45}{7}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)$$

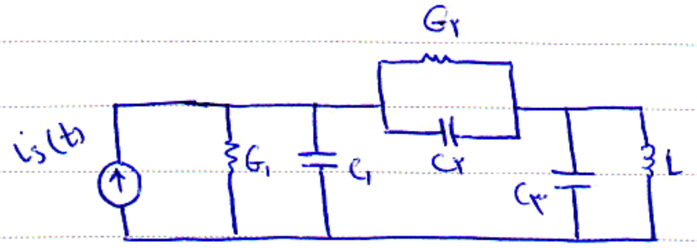
$$v(t)=-\frac{30}{7}\delta(t)-\frac{5}{49}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)\Rightarrow$$ $v(t)$ دارای ضربه است.

تنظیم کردن معادلات جبر خطی:

هدف انتقال معادلات حوزه انتگرال-دیفرانسیل به حوزه لاپلاس است.

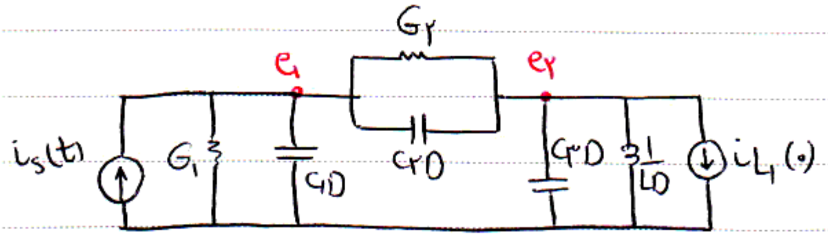
با یک مثال مسئله را بررسی می‌کنیم.

مثال) معادلات انتگرال-دیفرانسیل مدار زیر را در حوزه انتگرال-دیفرانسیل به روش گره به دست آورید.




$V_{C_1}(0), V_{C_2}(0), V_{C_3}(0)$ و $i_L(0)$

حوزه انتگرال-دیفرانسیل




از روش بازرسی:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+C_1D+C_2D & -G_2-C_2D \\ -G_2-C_2D & G_2+C_2D+C_3D+\frac{1}{LD}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_s(t) \\ -i_L(0)\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Df(t)\xrightarrow{L} sF(s)-f(0^-) \\ \frac{1}{D}f(t)\xrightarrow{L}\frac{F(s)}{s}\end{cases}$$

$$\begin{cases} G_1e_1 + G_2e_1 + C_1De_1 + C_2De_1 - G_2e_2 - C_2De_2 = i_s(t) \\ -G_2e_1 - C_2De_1 + G_2e_2 + C_2De_2 + C_3De_2 + \frac{1}{LD}e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (G_1+G_2)e_1 + (C_1+C_2)De_1 - G_2e_2 - C_2De_2 = i_s(t) \\ -G_2e_1 - C_2De_1 + G_2e_2 + (C_2+C_3)De_2 + \frac{1}{LD}e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

با انتقال به حوزه لاپلاس:

$$(G_1+G_2)E_1(s) + (C_1+C_2)\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] - G_2E_2(s)$$

$$-C_2\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] = I_s(s)$$

$$① \rightarrow \boxed{E_1(s)\left(G_1+G_2+C_1s+C_2s\right) + E_2(s)\left(-G_2-C_2s\right) = I_s(s) + C_1\overset{v_{C_1}(0^-)}{e_1(0^-)} + C_2\overset{v_{C_2}(0^-)}{\left(e_1(0^-)-e_2(0^-)\right)}}$$

$$-G_2E_1(s) - C_2\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] + G_2E_2(s) + (C_2+C_3)\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] + \frac{1}{Ls}E_2(s)$$

$$= -\frac{i_{L_1}(0)}{s}$$

$$② \boxed{E_1(s)\left(-G_2-C_2s\right) + E_2(s)\left(G_2+C_2s+C_3s+\frac{1}{Ls}\right) = -\frac{i_L(0)}{s} - C_2\overset{v_{C_1}(0^-)}{e_1(0^-)} + C_2\overset{v_{C_2}(0^-)}{e_2(0^-)} + C_3\underset{v_{C_3}(0^-)}{e_2(0^-)}}$$

معادلات را به صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+C_1s+C_2s & -G_2-C_2s \\ -G_2-C_2s & G_2+C_2s+C_3s+\frac{1}{Ls} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} =$$

بردار شرایط اولیه

$$\begin{bmatrix} I_s(S) \\ \\ -\frac{i_L(0)}{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 e_1(0) + C_2\left(e_1(0) - e_2(0)\right) \\ C_1 v_{C_1}(0) + C_2 v_{C_2}(0) \\ -C_2 e_1(0) + C_2 e_2(0) + C_3 e_2(0) \\ -C_2 v_{C_1}(0) + C_2 v_{C_3}(0) + C_3 v_{C_3}(0) \end{bmatrix}$$

اما از تشکیل معادلات فوق راه حل مستقیمی به صورت زیر وجود دارد:

حوزه انتگرال دیفرانسیل

بردار شرایط اولیه

روش گره $\quad Y_n \cdot e = i_s \xrightarrow{L} Y_n(S)\; E(S) = I_s(S) + \alpha$

روش مش $\quad Z_m \cdot i = e_s \xrightarrow{L} Z_m(S) \cdot I(S) = E_s(S) + \alpha$

روش حلقه اساسی $\quad Z_B \cdot i = e_s \xrightarrow{L} Z_B(S) \cdot I(S) = E_s(S) + \alpha$

روش کات ست اساسی $\quad Y_Q \cdot e = i_s \xrightarrow{L} Y_Q(S) \cdot E(S) = I_s(S) + \alpha$

در روش های گره و کات ست اساسی، بردار شرایط اولیه شامل ولتاژ اولیه خازن ها است.

در روش های مش و حلقه اساسی، بردار شرایط اولیه شامل جریان اولیه سلف ها است.

$\frac{1}{D} \to \frac{1}{s}$

$D \to S$

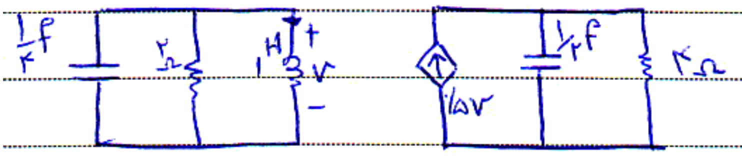
برای تبدیل معادلات انتگرال دیفرانسیل به حوزه لاپلاس در طرف چپ معادلات اول ابتدا D ها را به S تبدیل می کنیم و هر جا D داریم (و نه $\frac{1}{D}$) با همان علامت و همان ضریب، شرایط اولیه را در بردار $\alpha$ جمع می کنیم.

فرض کنید معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل یک مدار در آنالیز مش به صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} 2D+\frac{1}{D} & -D & 3 \\ -D & 3D+2 & D \\ 3 & D & 5D+\frac{1}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

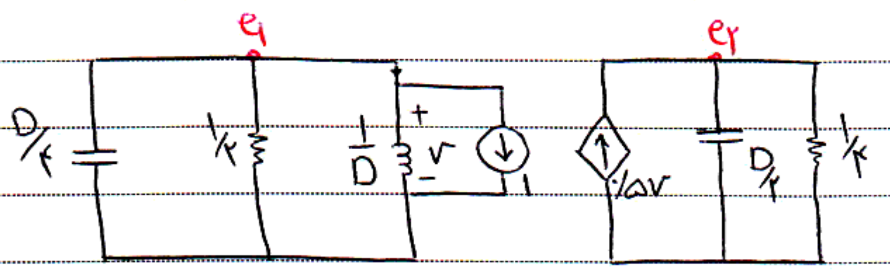
$$\begin{bmatrix} 2s+\frac{1}{s} & -s & 3 \\ -s & 3s+2 & s \\ 3 & s & 5s+\frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2i_1(0^-)-i_2(0^-) \\ -i_1(0^-)+3i_2(0^-)+i_3(0^-) \\ i_2(0^-)+5i_3(0^-) \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

مثال ۵) در مدار زیر مقدار v را بیابید. (در حوزه لاپلاس)




$i_L(0^-)=1A \qquad V_{C_1}(0^-)=2V \qquad V_{C_2}(0^-)=1V$

ابتدا معادلات انتگرال دیفرانسیل را در یکی از روش ها مثلا گره می نویسیم.




$$\begin{bmatrix} \frac{D}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{D} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{D}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5e_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{s} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{s}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} e_1(0^-) \\ \frac{1}{2} e_2(0^-) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} V_{C_1}(0^-)=2 \\ V_{C_2}(0^-)=1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s^2+2s+4}{4s} & 0 \\ -1/2 & \frac{2s+1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{2s} \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$E_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s-2}{2s} & 0 \\ 1/2 & \frac{2s+1}{4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{s^2+2s+4}{4s} & 0 \\ -1/2 & \frac{2s+1}{4} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{(s-2)(2s+1)}{8s}}{\frac{(s^2+2s+4)(2s+1)}{16s}}$$

$$E_1(s) = \frac{2s-4}{s^2+2s+4}$$

$$P_1, P_2 = -1 \pm j\sqrt{3} \qquad E_1(s) = \frac{K}{\left(s-(-1+j\sqrt{3})\right)} + \frac{K^*}{\left(s-(-1-j\sqrt{3})\right)}$$

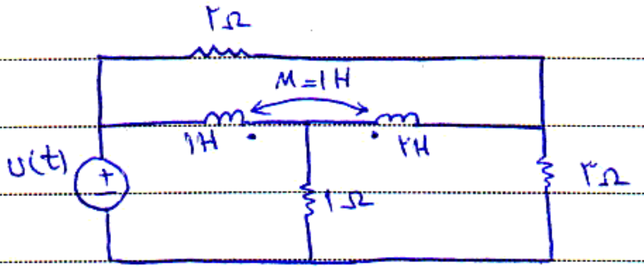
$$K = \left(s-(-1+j\sqrt{3})\right) E_1(s)\Big|_{s=-1+j\sqrt{3}} = \frac{2s-4}{s+1+j\sqrt{3}}\Big|_{s=-1+j\sqrt{3}} = \frac{-2+2j\sqrt{3}-4}{2j\sqrt{3}} = \frac{-3+j\sqrt{3}}{j\sqrt{3}}$$

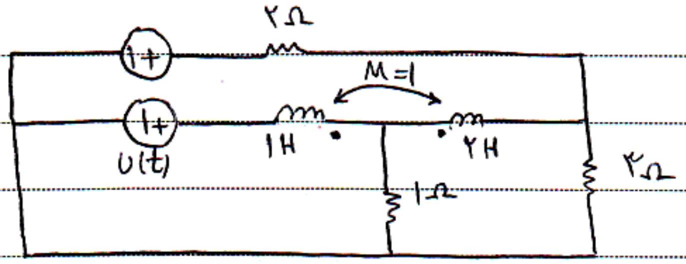
$$= \frac{2\sqrt{3}\angle 150}{\sqrt{3}\angle 90} = 2\angle 60 \quad \begin{cases} |K| = 2 \\ \angle K = 60 \end{cases}$$

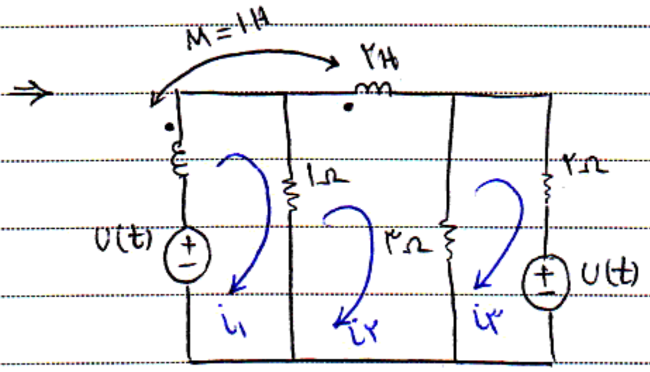
$$v(t) = 2|K| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \angle K)$$

$$= 4e^{-t} \cos(\sqrt{3}\, t + 60)$$

مثال) با استفاده از روش لاپلاس، مدار زیر را آنالیز کنید؟

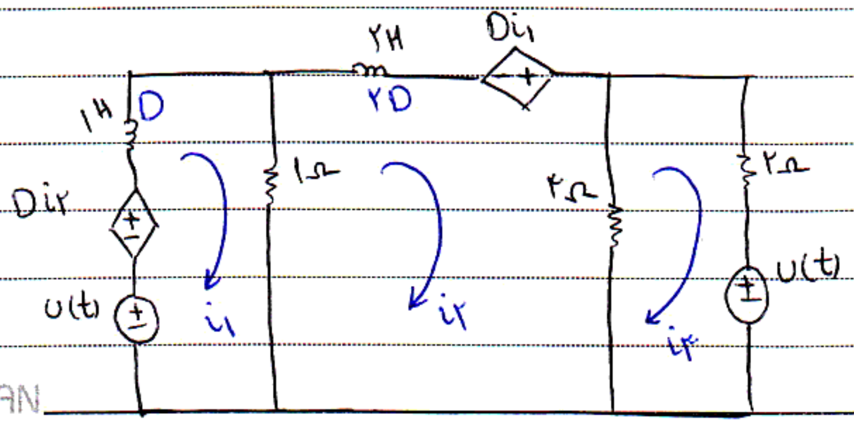


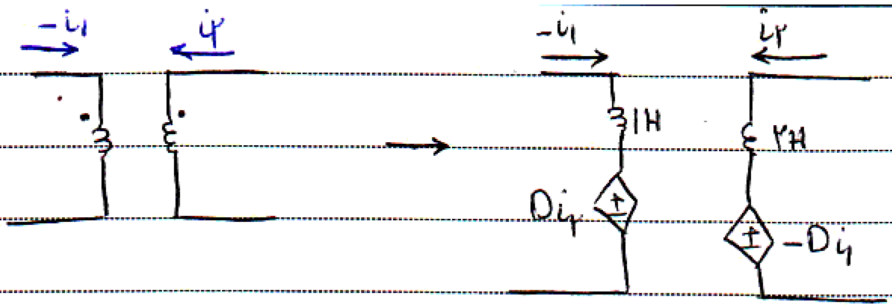




روش مش را استفاده می‌کنیم.

برای استفاده از روش مش باید مدار معادل سلف‌های تزویج شده استفاده می‌کنیم






$$\begin{bmatrix} D+1 & -1-D & 0 \\ -1-D & 2D+4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t)+\cancel{Di_2} \\ \cancel{Di_1} \\ -v(t) \end{bmatrix}$$

$$i_{L_1}(0^-) \qquad i_{L_2}(0^-)$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1-s & 0 \\ -1-s & 2s+4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}+i_1(0^-)-i_2(0^-) \\ 0-i_1(0^-)+2i_2(0^-) \\ -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

معادلات حالت و تبدیلات لاپلاس :

در معادلات حالت داریم :

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\xrightarrow{L} sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BU(s)$$

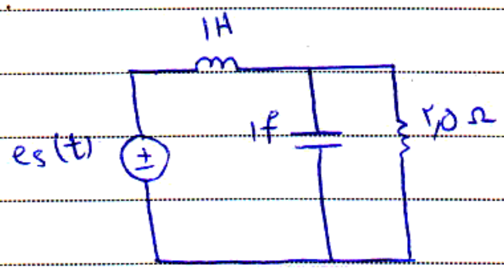
$$X(s)(sI - A) = +BU(s) + x(0) \longrightarrow \boxed{X(s) = (sI - A)^{-1}\left[BU(s) + x(0)\right]}$$

پاسخ حالت صفر $\quad x(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$

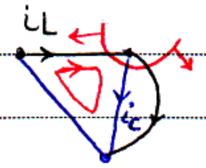
پاسخ ورودی صفر $\quad X(s) = (sI - A)^{-1} x(0^-)$

* پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار همان پاسخ حالت صفر است.

سؤال) با استفاده از معادلات حالت، پاسخ پله و پاسخ ضربه مدار زیر را بدست آورید.




گراف:




$$\text{KCL:}\quad C\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{2.5}-i_L=0$$

$$\boxed{\dot{v}_C=-\frac{1}{2.5}v_C+i_L}$$

$$\text{KVL:}\quad L\frac{di_L}{dt}+v_C-e_s=0 \Longrightarrow \boxed{\dot{i}_L=-v_C+e_s}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{-1}{2.5} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}e_s$$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{-1}{2.5} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2.5s+1}{2.5} & -1\\ 1 & s\end{bmatrix}$$

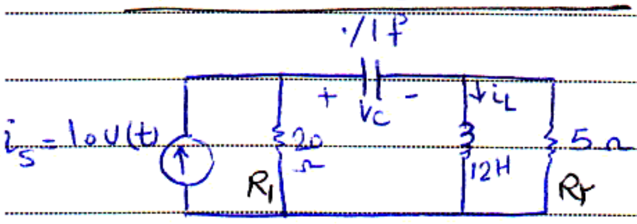
ماتریس یکه

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\frac{2.5s^2+s+2.5}{2.5}}\begin{bmatrix}s & 1\\ -1 & \frac{2.5s+1}{2.5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2.5s}{2.5s^2+s+2.5} & \frac{2.5}{2.5s^2+s+2.5}\\ \frac{-2.5}{2.5s^2+s+2.5} & \frac{6.25}{(2.5s+1)(2.5s^2+s+2.5)}\end{bmatrix}$$

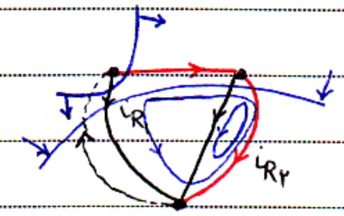
پاسخ ضربه $\quad e_s(t)=\delta(t)\longrightarrow E_s(s)=1$

$$x(s) = \begin{bmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} = \left[ (sI - A)^{-1} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 1$$

مثال) در مدار زیر معادلات حالت را بدست آورید سپس پاسخ ورودی (پاسخ حالت صفر) را با شرایط اولیه صفر حساب کنید؟




گراف :




غیرحالت

$$KCL: \quad 0/1\frac{dv_C}{dt} + i_{R_1} - 10u(t) = 0 \longrightarrow \frac{dv_C}{dt} = -10\, i_{R_1} + 10\, i_s \quad (1)$$

$$KVL: \quad 0/2\frac{di_L}{dt} = 5\, i_{R_2} \longrightarrow \frac{di_L}{dt} = 25\, i_{R_2} \quad (2)$$ غیرحالت

$$KVL: \quad 20\, i_{R_1} - 5\, i_{R_2} - v_C = 0 \longrightarrow i_{R_1} = \frac{1}{4} i_{R_2} + \frac{1}{20} v_C \quad (A)$$ حذف متغیر غیرحالت $i_{R_1}$ :

(A) در (1) :

غیرحالت

$$\dot{v}_C = \frac{-10}{4} i_{R_2} - \frac{1}{2} v_C + 10\, i_s \quad (3)$$

$$KCL: \quad i_{R_2} + i_L + i_{R_1} - i_s = 0$$ حذف غیرحالت $i_{R_2}$ :

$$i_{R_2} = -i_L - i_{R_1} + i_s$$

(A) را در معادله بالا می‌گذاریم :

$$i_{R_2} = -i_L - \frac{1}{4} i_{R_2} - \frac{1}{20} v_C + i_s$$

TABAN

$$\frac{5}{4} i_{R_2} = -i_L - \frac{1}{20} v_C + i_s$$

$$i_{R_2} = -\frac{4}{5} i_L - \frac{1}{25} v_C + \frac{4}{5} i_s \quad \text{(B)}$$

(B) را در (2) و (3) قرار می‌دهیم تا معادلات حالت تولید شود.

(B) در (2):

$$\dot{i}_L = -20 i_L - v_C + 20 i_s \quad \text{معادلهٔ حالت}$$

(B) در (3):

$$\dot{v}_C = 2 i_L + 0/1 v_C - 2 i_s - \frac{1}{2} v_C + 10 i_s$$

$$\dot{v}_C = 2 i_L - 0/4 v_C + 8 i_s \quad \text{معادلهٔ حالت}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 \\ 2 & -0/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} i_s$$

محاسبهٔ روابط $i_L$ و $v_C$:

یک راه استفاده از معادلات انتگرال دیفرانسیل در حوزه‌ی زمان است. از ۴ روش موجود با استفاده از معادلات لاپلاس، یک راه استفاده از حوزه‌ی لاپلاس با استفاده از ماتریس A است.

داریم:

$$X(S) = (SI - A)^{-1} \left[ BU(S) + x(0^-) \right]$$

با شرایط اولیه صفر:

$$X(S) = (SI - A)^{-1} BU(S) = \begin{bmatrix} S+20 & 1 \\ -2 & S+0/4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} \underbrace{\left(10 \times \frac{1}{S}\right)}_{U(S)}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s+20)(s+0.4)+2}\begin{bmatrix} s+0.4 & -1 \\ 2 & s+20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{200}{s} \\ \frac{80}{s} \end{bmatrix}$$

$$X(s)=\begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{200s}{s(s^2+20.4s+10)} \\ \dfrac{80s+2000}{s(s^2+20.4s+10)} \end{bmatrix}$$

$$I_L(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{(s+0.505)}+\frac{K_3}{(s+19.895)}$$

$$K_1=\left.\frac{200s}{s^2+20.4s+10}\right|_{s=0}=0$$

$$K_2=\left.\frac{200s}{s(s+19.895)}\right|_{s=-0.505}=10.31 \qquad K_3=\left.\frac{200s}{s(s+0.505)}\right|_{s=-19.895}=-10.31$$

$$\boxed{i_L(t)=10.31\left(e^{-0.505t}-e^{-19.895t}\right)u(t)}$$

محاسبه $V_C$ بر عهده‌ی دانشجویان

# فصل ۱۴: فرکانس های طبیعی

سیستمی مانند سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t)=3\cos 2t+e^{-2t} \quad \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow \quad y(t)=\sin 3t+\cos(5t+30^\circ)+0.2e^{-2t}+3e^{-4t}$$

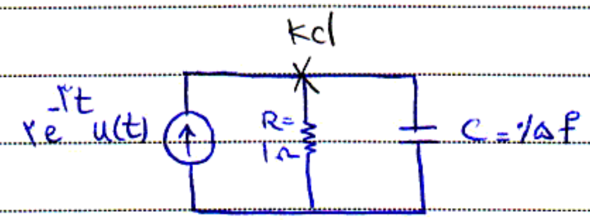
فرکانس های $3t$ و $2t$ که در خروجی ظاهر شده اند ممکن است ناشی از ورودی باشند اما فرکانس های $5t$ و $4t$ ناشی از صفات سیستم در خروجی ظاهر شده است و ارتباطی با ورودی ندارد.

بنابراین با توجه به توضیحات فوق:

نکته: فرکانس های طبیعی در پاسخ ورودی صفر سیستم ظاهر می‌شوند.

یک راه این است که معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار را بنویسیم. ریشه های معادله ی مشخصه همان فرکانس های طبیعی هستند.

مثال:




$v_C(0)=2V$

می خواهیم پاسخ کامل $v_C$ را بدست آوریم؟

پاسخ کامل $v_C$:

$$2e^{-3t}=0.5\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{1}$$

معادله دیفرانسیل مدار:
$$\boxed{\frac{dv_c}{dt}+2v_c=4e^{-3t}}$$

پاسخ عمومی $\quad v_c(t)=Ke^{-2t}$

پاسخ خصوصی $\quad v_c(t)=Ae^{-3t} \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} -3Ae^{-3t}+2Ae^{-3t}=4e^{-3t} \longrightarrow \boxed{A=-4}$

پاسخ کامل $\quad v_c(t)=\underbrace{v_c(t)}_{\text{عمومی}}+\underbrace{v_c(t)}_{\text{خصوصی}} \longrightarrow v_c(t)=Ke^{-2t}-4e^{-3t}$

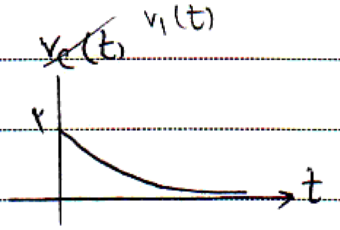
$v_c(0)=2 \longrightarrow K-4=2 \longrightarrow K=6$

$$\boxed{v_c(t)=(6e^{-2t}-4e^{-3t})\,u(t)}$$

با توجه به جواب مسئله $s=-2$ فرکانس طبیعی سیستم است اما $s=-3$ نباید فرکانس طبیعی باشد شاید ناشی از ورودی باشد. در حالیکه اگر معادله مشخصه را بررسی کنیم:

$\frac{dv_c}{dt}+2v_c=0 \longrightarrow s+2=0 \longrightarrow \boxed{s=-2}$

پس فقط $s=-2$ فرکانس طبیعی سیستم است.




خاص:

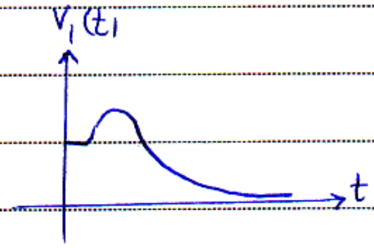
حال فرض کنید ورودی به صورت زیر باشد و مدار را با فرکانس طبیعی اش تحریک کنیم:


$v_c(0)=2V$

پاسخ کامل $v_C$،

$$e^{-2t} = 0.5\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{1}$$

$$\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = 2e^{-2t}$$




پاسخ عمومی $v_C(t) = kte^{-2t}$

پاسخ خصوصی $v_C(t) = Ae^{-2t} \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} -2Ae^{-2t} + 4Ae^{-2t} = 2e^{-2t} \longrightarrow \boxed{A=1}$

کامل $v_C(t) = v_C(t)_{\text{عمومی}} + v_C(t)_{\text{خصوصی}} \Rightarrow v_C(t) = kte^{-2t} + e^{-2t} \longrightarrow v_C(t) = e^{-2t}(1+kt)$

مثال: معادله مشخصه یک مدار به صورت زیر است،

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + 4i_L + 3 = 0$$

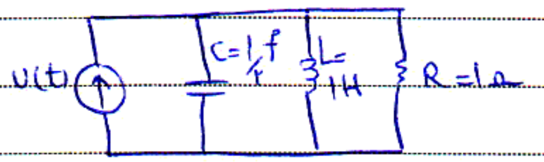
$$s^2 + 4s + 3 = 0 \quad \begin{cases} s = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ s = \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases}$$

کاملا میرا است.

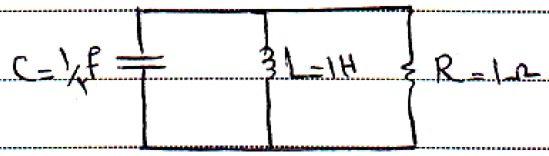
انواع فرکانس‌های طبیعی:
- فرکانس‌های طبیعی متغیرهای شبکه
- فرکانس‌های طبیعی کل شبکه

یعنی ممکن است یک یا تعدادی از فرکانس‌های طبیعی کل شبکه در ولتاژ یا جریان یک شاخه ظاهر نشوند.

مثال: فرکانس‌های طبیعی ولتاژ خازن را به دست آورید.



منبع برای سیستم تا مدار در شرایط ورودی صفر قرار گیرد.




$$i_C + i_L + i_R = 0$$

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0 \longrightarrow \text{معادله مدار}$$

$$C\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{1}{L}v_C + \frac{1}{R}\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$0/5\frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C + \frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + 2\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = 0 \longrightarrow s^2 + 2s + 2 = 0 \quad \text{معادله مشخصه}$$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4j^2}}{2} \begin{cases} -1+j \\ -1-j \end{cases} \text{فرکانس‌های طبیعی}$$

می‌توان نشان داد قطب‌های تابع تبدیل در حوزه لاپلاس همان فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند.

روش ۲

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0$$

$$\frac{dv_C}{dt} + 2\int v_C\,dt + 2v_C + 2i_L(0) = 0 \xrightarrow{L} sV_C(s) - v_C(0) + \frac{2}{s}V_C(s) + 2V_C(s) + \frac{2i_L(0)}{s} = 0$$

$$V_C(s)\left(s + \frac{2}{s} + 2\right) = v_C(0) - \frac{2}{s}i_L(0)$$

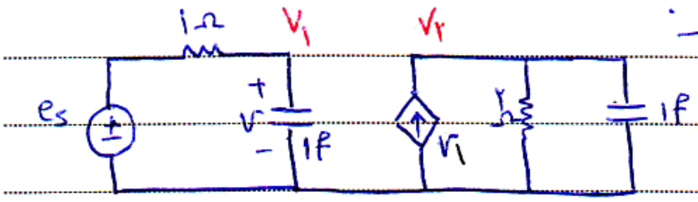
$$V_C(s) = \frac{v_C(0) - \frac{2}{s}i_L(0)}{s + \frac{2}{s} + 2}$$

$$V_C(S) = \frac{SV_C(0^-) - 2i_L(0^-)}{S^2+2S+2}$$

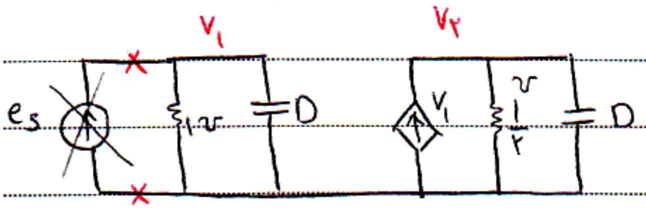
قطب‌ها $\begin{cases} S=-1+j \\ S=-1-j \end{cases}$

یعنی:

مثال ۲) فرکانس‌های طبیعی $V_1$ و $V_2$ را بدست آورید؟




در حالت ورودی صفر، مدار را از راه گره تحلیل می‌کنیم.




$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ -1 & D+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ -1 & S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(0^-) \\ V_2(0^-) \end{bmatrix} \begin{array}{l} V_{C_1}(0^-) \\ V_{C_2}(0^-) \end{array}$$

$$V_1(S) = \frac{\begin{vmatrix} V_1(0^-) & 0 \\ V_2(0^-) & S+\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})} = \frac{V_1(0^-)(S+\frac{1}{2})}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}$$

$$V_1(S) = \frac{V_1(0^-)}{S+1} \xrightarrow{\text{فرکانس طبیعی}} \boxed{S=-1}$$

$$V_2(S) = \frac{\begin{vmatrix} S+1 & V_1(0^-) \\ -1 & V_2(0^-) \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})} \Longrightarrow \boxed{V_2(S) = \frac{V_2(0^-)(S+1)+V_1(0^-)}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}}$$

فرکانس‌های طبیعی $\begin{cases} S=-1 \\ S=-\frac{1}{2} \end{cases}$

۱- $s=-1$ و $s=-1/2$ فرکانس‌های طبیعی مدار هستند ولی $s=-1/2$ در پاسخ $V_1$ ظاهر نشده.

سؤال) در مثال قبل پاسخ به ورودی‌های زیر را بدست آورید؟

$$\begin{cases} e_s(t)=u(t) \\ e_s(t)=e^{-t}\,u(t) \end{cases}$$

شرایط اولیه: $V_{C_1}(0^-)=V_{C_2}(0^-)=1$

$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ \cancel{0}\,-1 & D+1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \cancel{V_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_{C_1}(0^-)+E_s \\ 1 \\ V_{C_2}(0^-) \end{bmatrix}$$

$$V_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} 1+E_s & 0 \\ 1 & s+1/2 \end{vmatrix}}{(s+1)(s+1/2)}=\frac{(1+E_s)(s+1/2)}{(s+1)(s+1/2)}=\frac{1+E_s}{(s+1)}$$

$$V_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+1 & 1+E_s \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{(s+1)(s+1/2)}=\frac{s+2+E_s}{(s+1)(s+1/2)}$$

الف) $E_s=\frac{1}{s}$

$$V_1(s)=\frac{1+1/s}{s+1}=\frac{\frac{s+1}{s}}{s+1}=\frac{1}{s}$$

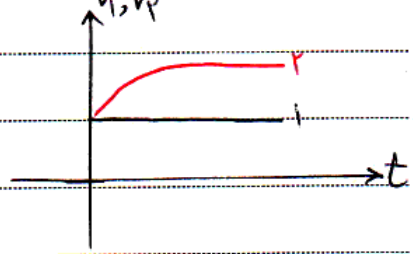
$$\Rightarrow \boxed{V_1(t)=u(t)}$$

$$V_2(s)=\frac{s+2+1/s}{(s+1)(s+1/2)}=\frac{s+1}{s\,(s+1/2)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1/2}$$

$$K_1 = \left.\frac{s+1}{s+1/2}\right|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = \left.\frac{s+1}{s}\right|_{s=-1/2} = -1$$

$$V_2(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1/2} \longrightarrow \boxed{V_2(t) = (2 - e^{-1/2\,t})\,u(t)}$$



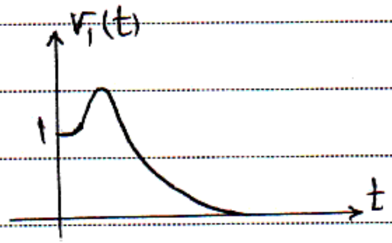

ب) : $E_g = \frac{1}{(s+1)}$ این ورودی، فرکانس طبیعی مدار را تحریک می‌کند.

$$V_1(s) = \frac{1 + \frac{1}{s+1}}{s+1} = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

$$V_1(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2}$$

$$K_{12} = (s+2)\Big|_{s=-1} = 1 \qquad K_{11} = \frac{d}{ds}\Big[(s+2)\Big]_{s=-1} = 1$$

$$\boxed{v_1(t) = (e^{-t} + t\,e^{-t})\,u(t)} \Longrightarrow \boxed{v_1(t) = e^{-t}(1+t)\,u(t)}$$




$$V_2(s) = \frac{(s+2) + \frac{1}{s+1}}{(s+1)(s+1/2)} = \frac{\frac{s^2+3s+3}{s+1}}{(s+1)(s+1/2)}$$

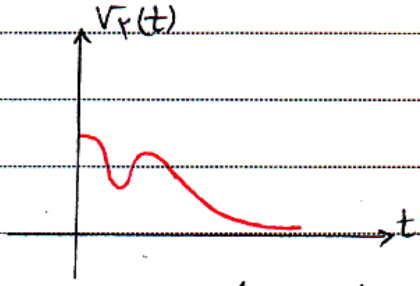
$$V_2(s) = \frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2(s+1/2)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{s+1/2}$$

$$K_{12} = \left.\frac{s^2+3s+3}{s+1/2}\right|_{s=-1} = \frac{1-3+3}{-1/2} = -2$$

$$K_{11} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+3s+3}{s+1/2}\right]_{s=-1} = \left[\frac{(2s+3)(s+1/2) - s^2-3s-3}{(s+1/2)^2}\right]_{s=-1} = \frac{1\times(-1/2)-1+3-3}{1/4} = -6$$

$$K_2 = \frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2}\bigg|_{s=-1/2} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+3}{\frac{1}{4}} = 7$$

$$v_{c_2}(t) = \left(-6e^{-t} - 2te^{-t} + 7e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$$



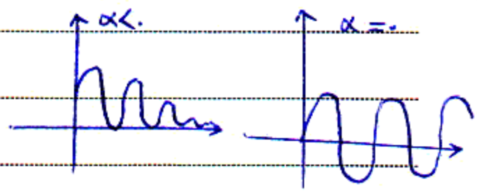

حالت‌های ممکن برای فرکانس‌های طبیعی:

$$f(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + k_3 e^{s_3 t} + \dots$$

۱) اگر حقیقی باشند دارای علامت منفی و اگر مختلط باشند زوج با قسمت حقیقی منفی‌اند. فرکانس‌های طبیعی مختلط به صورت نوسانی در جواب ظاهر می‌شوند (به صورت Sin و Cos)

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

$$f(t) = e^{(\alpha+j\omega)t} + e^{(\alpha-j\omega)t} = e^{\alpha t}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$




$$f(t) = 2e^{\alpha t}\cos\omega t$$

$\alpha$: قسمت حقیقی (ضریب میرایی)

$\omega$: قسمت موهومی فرکانس طبیعی (فرکانس نوسانی)

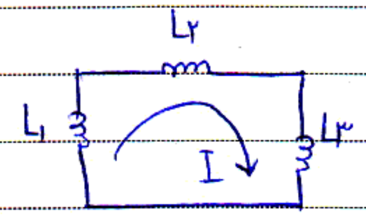
۲) هرگاه، تغییر شکل دور نظر جریان یک سلف باشد و این سلف در حلقه قرار گیرد باشد، این حلقه فقط از تعدادی سلف تشکیل شده. چون سلف‌ها ایده‌آل فرض می‌شوند ممکن است جریان ثابت $I_0$ در آن باقی بماند یعنی:

$$\frac{I_0}{s} \xrightarrow{L^{-1}} I_0 e^{0t} u(t)$$

بنابراین هر حلقه ی سلفی، یک فرکانس طبیعی صفر خواهیم داشت.

بنابراین $S=0$ فرکانس طبیعی جریان سلف خواهد بود.

مثال)




$$KVL: \quad L_1 \frac{dI_{L_1}}{dt} + L_2 \frac{dI_{L_2}}{dt} + L_3 \frac{dI_{L_3}}{dt} = 0$$

$$L_1\left(sI_{L_1}(s) - I_{L_1}(0^-)\right) + L_2\left(sI_{L_2}(s) - I_{L_2}(0^-)\right) + L_3\left(sI_{L_3}(s) - I_{L_3}(0^-)\right) = 0$$

$$I_{L_1}(s) = I_{L_2}(s) = I_{L_3}(s) \triangleq I_L(s)$$

$$I_L(s) = \overbrace{\frac{L_1 I_{L_1}(0^-) + L_2 I_{L_2}(0^-) + L_3 I_{L_3}(0^-)}{s(L_1+L_2+L_3)}}^{I_0} = \frac{I_0}{s}$$

اگر $S=0$ فرکانس طبیعی جریان سلف باشد فرکانس طبیعی ولتاژ سلف نخواهد بود.

$$V_L(t) = L\frac{dI_L(t)}{dt} \longrightarrow V_L(s) = L\left(s\underbrace{I_L(s)}_{\frac{I_0}{s}} - i_L(0^-)\right)$$

۳) هرگاه متغیر مورد نظر ولتاژ یک خازن باشد و این خازن فقط در حلقات سری با خازن ها تشکیل شده
قرار داشته باشد چون خازن ها ایده آل فرض می شوند معلوم است ولتاژ ثابت $V_0$ در دو سر آن خواهد ماند

در این صورت $V(s) = \frac{V_0}{s} \xrightarrow{L^{-1}} V_0 e^{0t} u(t)$

$i_C = C\frac{dv}{dt} \xrightarrow{L}$

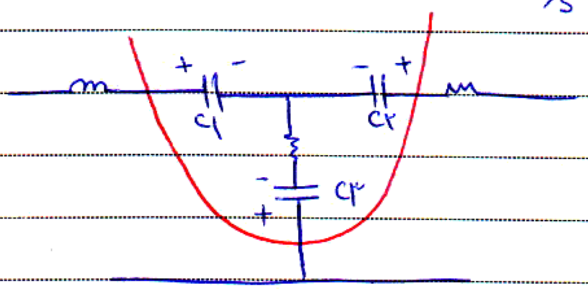
* اگر S=۰ در پاسخ ضربه ولتاژ خازن باشد، در پاسخ ضربه جریان خازن خواهد بود.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$I_C(S) = C\underbrace{S V_C(S)}_{1/S} - C V_C(0^-) = C\left(1 - V_C(0^-)\right)$

و S=۰ در پاسخ ضربه ولتاژ خازن خواهد بود.

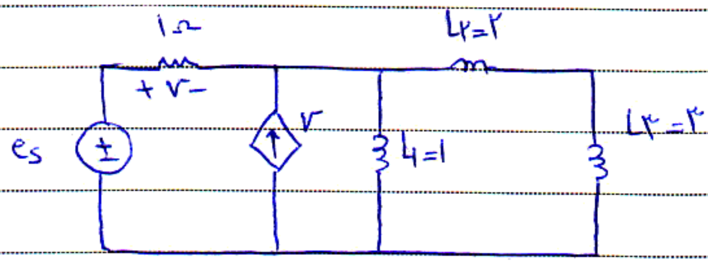


✓ برای حلقه‌های سلفی و کات‌ست‌های خازنی در پاسخ ضربه صفر داریم

$C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} + C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} + C_3 \frac{dV_{C_3}}{dt} = 0$

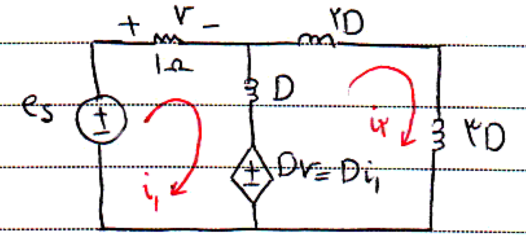
$C_1 S V_{C_1}(S) - C_1 V_{C_1}(0) + C_2 S V_{C_2}(S) - C_2 V_{C_2}(0^-) + C_3 S V_{C_3}(S) - C_3 V_{C_3}(0^-) = 0$

مثال: در پاسخ ضربه جریان سلف‌ها را به دست آورید؟

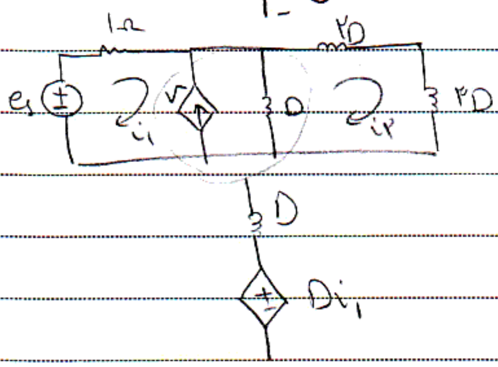


$I_{L_1}(0^-) = 1$

$I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-) = 2$



از روش مش حل می‌کنیم.



$V = 1 \times i_1 = i_1$

$$\begin{bmatrix} D+1+D & -D \\ -D-D & 4D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_S - \cancel{Di_1} \\ \cancel{Di_1} \end{bmatrix}$$

$I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-) + I_{L_3}(0^-) = 5$

$$\begin{bmatrix} 2S+1 & -S \\ -2S & 4S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(S) \\ I_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_S + 2i_1(0^-) - i_2(0^-) \\ -2i_1(0^-) + 4i_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$-2I_{L_1}(0^-) - 2I_{L_3}(0^-) + 4I_{L_2}(0^-) = 10$

TABAN

$$i_1(0^-) - i_2(0^-) = I_{L_1}(0^-)$$

$$\longrightarrow \quad i_1(0^-) = I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-)$$

$$i_2(0^-) = I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-)$$

$$\begin{bmatrix} 2s+1 & -s \\ -2s & 4s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Es+5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} Es+5 & -s \\ 10 & 4s \end{vmatrix}}{(2s+1)4s - 2s^2} = \frac{4s(Es+5)+10s}{12s^2+4s-2s^2}$$

$$\boxed{I_1(s) = \frac{4s(Es+5)+10s}{s(10s+4)}}$$

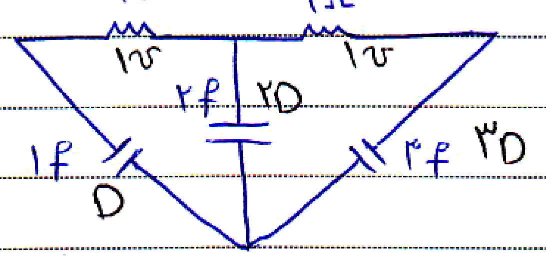
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2s+1 & Es+5 \\ -2s & 10 \end{vmatrix}}{(2s+1)4s - 2s^2} = \frac{10(2s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+4)}$$

$$I_{L_1}(s) = I_1(s) - I_2(s) = \frac{\bigcirc}{s(10s+4)}$$

$$I_{L_2}(s) = I_{L_3}(s) = \frac{10(2s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+4)}$$

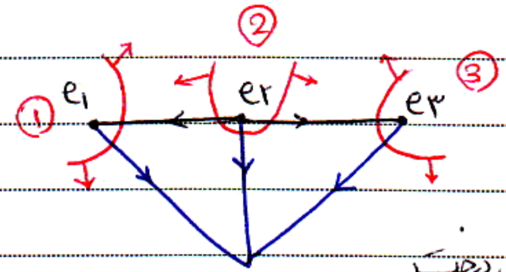
$s=0$ , $s=\frac{-4}{10}$ فرکانس طبیعی جریان سلفها است

مثال) فرکانس طبیعی ولتاژ خازنها را بدست آورید.




از روش متغیرهای حالت استفاده می‌کنیم

مدار خود در شرایط ورودی صفر است. (ورودی نداریم.)




بردار ولتاژ شاخه‌ها در جهت

$$\begin{bmatrix} D+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2D+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3D+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2s+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{C_1}(0^-) \\ 2V_{C_2}(0^-) \\ 3V_{C_3}(0^-) \end{bmatrix}$$

صورت کسر = A

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_{C_1}(0^-) & -1 & 0 \\ 2V_{C_2}(0^-) & 2(s+1) & -1 \\ 3V_{C_3}(0^-) & -1 & (3s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2(s+1) & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{vmatrix}} = \frac{V_{C_1}(0^-)\left[2(s+1)(3s+1)-1\right]+\left(2V_{C_2}(0^-)(3s+1)+3V_{C_3}(0^-)\right)}{s+1\left[2(s+1)(3s+1)-1\right]-(-1)\times(-3s-1)}$$

$$= \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1)-(s+1)-3s-1} = \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1)-4s-2} =$$

$$\frac{A}{(2s^2+4s+2)(3s+1)-4s-2} = \frac{A}{6s^3+2s^2+12s^2+4s+6s+2-4s-2}$$

$$= \frac{A}{6s^3+14s^2+6s} = \frac{A}{s(6s^2+14s+6)}$$

$s=0$ ریشه صفر ولتاژ خازن $C_1$ است یعنی ولتاژ مدار به ازای یک مقدار ثابت خواهد بود.

$$e_1(\infty) = \lim_{s \to 0} sE_1(s) = \frac{v_{c1}(0^-) + 2v_{c2}(0^-) + 3v_{c3}(0^-)}{6}$$

$e_2$ و $e_3$ به عهده ی خودتان.

---

فرکانس های طبیعی کل مدار = (فرکانس های طبیعی موجود در شبکه)

فرکانس های طبیعی شبکه، اجتماع تمام فرکانس های طبیعی شاخه ها می باشد. ثابت می شود برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی شبکه لازم نیست که فرکانس های طبیعی تمام شاخه ها را به دست آوریم، زیرا اگر $S \neq 0$ فرکانس طبیعی جریان شاخه باشد، فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه هم خواهد بود.

$$j_k = I e^{st}$$

۱) شاخه مقاومت باشد.

$$v_k = R j_k = \overset{V}{(RI)} e^{st} = V e^{st}$$

۲) شاخه سلف باشد.

$$v_k = L \frac{dj_k}{dt} = L \frac{d}{dt}\left[I e^{st}\right] = \overset{V}{(LIs)} e^{st} = V e^{st}$$

۳) شاخه خازن باشد.

$$v_k = \frac{1}{C}\int j_k \, dt + v_C(0^-) = \frac{1}{C}\int_0^t I e^{st} \, dt + v_C(0^-)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{I}{C} \times \frac{1}{s}\right)}_{V} e^{st} \overset{-\frac{I}{Cs}}{} + v_C(0^-) = V e^{st} + v_C(0^-) - V$$

به طور مشابه می توان اثبات کرد اگر $S \neq 0$ فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه باشد، فرکانس طبیعی جریان شاخه هم خواهد بود.

$S = 0$ ممکن است فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه باشد ولی فرکانس طبیعی جریان شاخه نباشد یک مثال بزنید؟

و بالعکس. ولتاژ جریان

TABAN

تعمیم: فرکانس های طبیعی غیر صفر هر شبکه خطی و تغییر ناپذیر با زمان همان ریشه های غیر صفر معادله دترمینان $P(S)$ است که $P(S)$ ماتریسی است که در یکی از ۴ روش، معادلات مدار را توصیف می کند

در روش گره: $Y_n(S)\,E(S) = I_S(S) + \alpha \longrightarrow P(S) = Y_n(S)$

در روش مش: $Z_n(S)\,I(S) = E_S(S) + \alpha \longrightarrow P(S) = Z_n(S)$

در روش حلقه اساسی: $Z_B(S)\,I(S) = E_S(S) + \alpha \longrightarrow P(S) = Z_B(S)$

در روش کات ست اساسی: $Y_Q(S)\,E(S) = I_S(S) + \alpha \longrightarrow P(S) = Y_Q(S)$

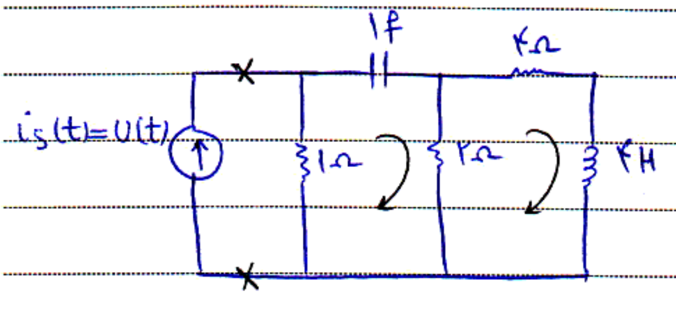
اثبات) مثلاً در روش گره:

$$E(S) = Y_n^{-1}(S)\,\big(I_S(S) + \alpha\big)$$

$$E(S) = \frac{\text{ماتریس دترمینان کهاد}}{\det(Y_n(S))}\,\big[I_S(S) + \alpha\big]$$

ریشه های آن فرکانس های طبیعی را می دهد.

مثال) فرکانس های طبیعی شبکه را بدست آورید؟




ورودی را حذف کنیم دو مش خواهیم

$$Z_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{D}+3 & -2 \\ -2 & 2+4D+4 \end{bmatrix}$$

$$Z_n(S)=\begin{bmatrix} \frac{3s+1}{s} & -2 \\ -2 & 4s+6 \end{bmatrix}$$

$$\det(Z_n(S)) = \frac{(3s+1)(4s+6)-4s}{s} = \frac{12s^2+18s+6}{s} = \frac{6(2s^2+3s+1)}{s}$$

$$|Z_n(S)| = 0 \xrightarrow[\frac{-3\pm1}{4}]{} \begin{cases} s=-\frac{1}{2} \\ s=-1 \end{cases}$$

مرتبه مدار و تعداد فرکانس های صفر:

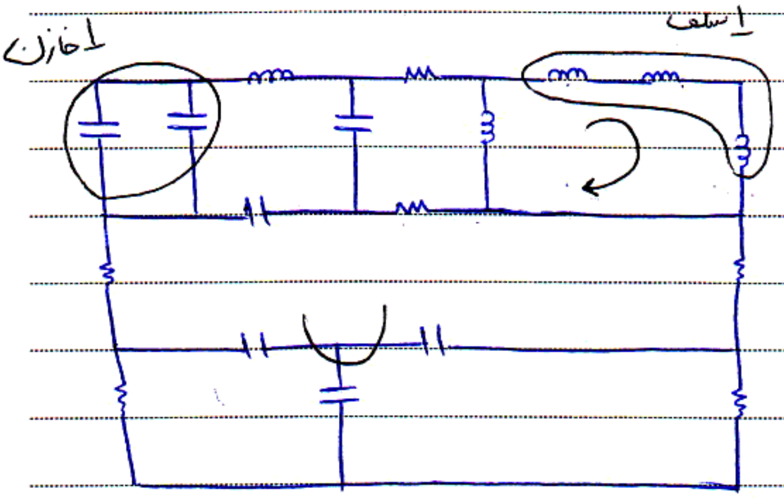
به درجه دترمینان $P(S)$ ( $|P(S)|$ ) ، دترمینان ماتریس مدار (مرتبه) می گوییم که معادل با:

(تعداد کات ست های سلفی) − (تعداد حلقه های خازنی) − (تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی)

که برابر با تعداد فرکانس های صفر نیز هست تعداد فرکانس های صفر غیر صفر:

(تعداد حلقه های سلفی) − (تعداد کات ست های خازنی) − (مرتبه مدار)

مثال)



تعداد عناصر ذخیره کننده = ۹
تعداد حلقه های خازنی = ۰
کات ست سلفی = ۰
→ مرتبه مدار: ۹

تعداد کات ست خازنی = ۱
حلقه سلفی = ۱

تعداد فرکانس های طبیعی = ۹
تعداد فرکانس های غیر صفر = ۷

فرکانس های طبیعی و معادلات حالت:

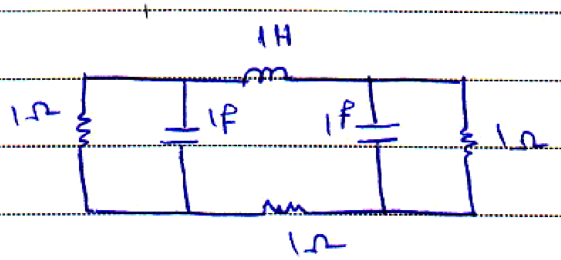
در معادلات حالت داشتیم: $X(S) = (SI - A)^{-1}\left[BU(S) + X(0^-)\right]$

در فرکانس های طبیعی ⟶ ورودی صفر $\quad X(S) = (SI - A)^{-1} X(0^-)$

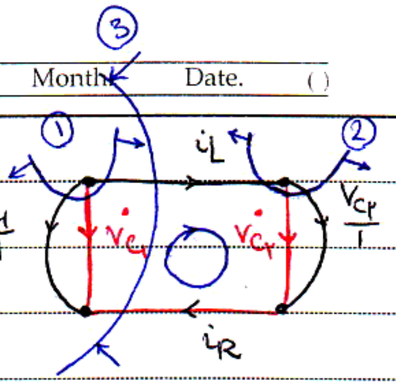
روش دیگر به دست آوردن فرکانس های طبیعی: $\left|SI - A\right| = 0$

ضمناً مرتبه مدار معادل با درجه $(SI - A)$ است یعنی درجه $\left|(SI - A)\right|$ در سیستم

مثال) با استفاده از معادلات حالت، فرکانس های طبیعی را بدست آورید؟




وقتی از طریق معادلات حالت می خواهیم فرکانس های طبیعی را پیدا کنیم به ماتریس B نیاز نیست، یعنی حتی اگر مدار دارای ورودی باشد می توانیم ورودی ها را کنار بگذاریم. منابع وابسته را نمی توانیم بکشیم.




$$KCL: \dot{v}_{c_1} + v_c + i_L = 0 \longrightarrow \dot{v}_{c_1} = -v_{c_1} - i_L$$

$$KCL: \dot{v}_{c_2} + v_{c_2} - i_L = 0 \longrightarrow \dot{v}_{c_2} = -v_{c_2} + i_L$$

$$KVL: \dot{i}_L + v_{c_2} + i_R \times 1 - v_{c_1} = 0 \longrightarrow \dot{i}_L = v_{c_1} - v_{c_2} - i_R$$

$$KCL: i_R - i_L = 0 \longrightarrow i_R = i_L \qquad \dot{i}_L = v_{c_1} - v_{c_2} - i_L$$

حال می‌توانیم ماتریس A یعنی $(SI - A)$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{c_1} \\ \dot{v}_{c_2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$SI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & s+1 & -1 \\ -1 & 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$\det(SI - A) = 0 \longrightarrow$ فرکانس‌های طبیعی

$$|SI - A| = (s+1)\left[(s+1)^2 + 1\right] + (s+1)$$

$$= (s+1)\left[s^2 + 2s + 2\right] + (s+1) = (s+1)(s^2 + 2s + 3) \quad \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -1 + j\sqrt{2} \\ s_3 = -1 - j\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\,j}{2}$$

تفاوت با استاد، ۳ ورق صفحه دارم

فصل ۱۵ : توابع شبکه

به طور کلی تابع شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$H(S) = \frac{\mathcal{L}[\text{پاسخ حالت صفر}]}{\mathcal{L}[\text{منبع ورودی}]}$$

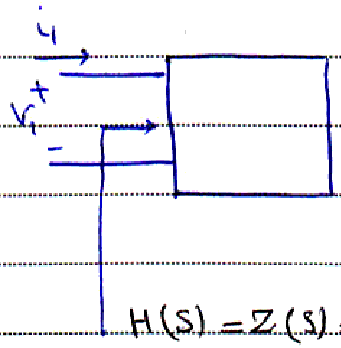
معمول است که در بررسی تابع شبکه، منبع ورودی را تابع ضربه در نظر می‌گیرند

$$H(S) = \frac{\mathcal{L}[h(t)]}{\mathcal{L}[\delta(t)]} = \mathcal{L}[h(t)]$$

$h(t)$ پاسخ ضربه می‌باشد

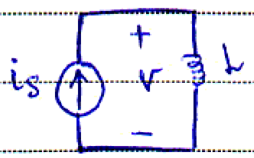
انواع تابع شبکه :

۱) امپدانس نقطه تحریک : $(Z_S)$



$$H(S) = Z(S) = \frac{V_1(S)}{I_1(S)}$$

مثال :

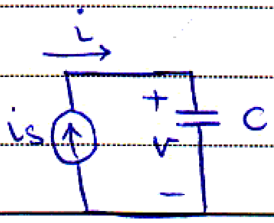


$$v = L\frac{di_s}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} LSI_s(S) - L\cancel{i_L(0^-)}$$

گفتیم که تابع شبکه در حالت صفر محاسبه می‌شود

$$\Rightarrow Z_S = \frac{V(S)}{I(S)} = LS$$

مثال :

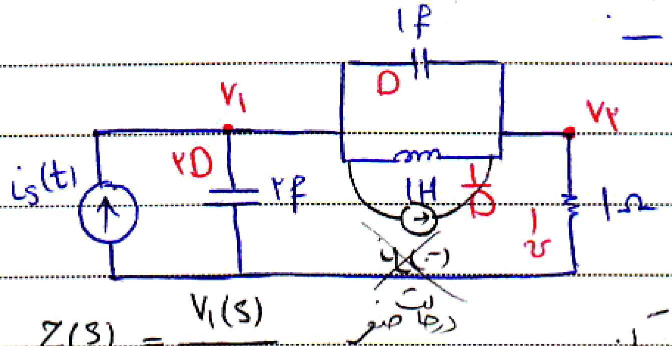


$$v = \frac{1}{C}\int_0^t i_s dt + \cancel{v_C(0^-)}$$

TABAN

$$V(s)=\frac{1}{Cs}I(s) \longrightarrow Z(s)=\frac{1}{Cs}$$

مثال) در مدار زیر امپدانس نقطه تحریک را بدست آورید؟




$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}$$

از روش گره حل می‌کنیم. هدف بدست آوردن $Z(s)$ است.

شرایط اولیه نداریم مستقیماً معادلات حوزه لاپلاس را می‌نویسیم (D را به s تبدیل می‌کنیم.)

$$\begin{bmatrix} 2s+s+\frac{1}{s} & -(s+\frac{1}{s}) \\ -(s+\frac{1}{s}) & s+\frac{1}{s}+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} 2V_1(0^-)+\text{--} \\ \text{--}\quad\text{--} \end{bmatrix}}_{\text{بردار شرایط اولیه}\,=\,0}$$

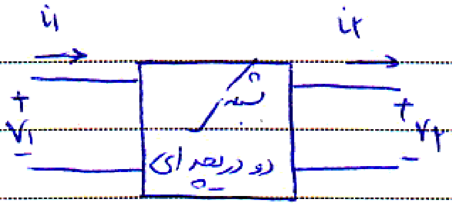
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3s+1 & -\frac{s^2+1}{s} \\ -\frac{s^2+1}{s} & \frac{s^2+s+1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1=\frac{\frac{s^2+s+1}{s}I_s}{\frac{(3s^2+1)(s^2+s+1)}{s^2}-\frac{(s^2+1)^2}{s^2}} \Rightarrow Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}=\frac{s(s^2+s+1)}{(3s^2+1)(s^2+s+1)-(s^2+1)^2}$$

تعریف توابع شبکه با استفاده از دو قطبی‌ها؟

برخی توابع شبکه را با استفاده از شبکه‌های دو دریچه‌ای تعریف می‌کنیم

۱) امپدانس نقطه تحریک: (وقتی تحریک از دریچه ۱ انجام شود)




$$H(S)=Z(S)=\frac{V_1(S)}{I_1(S)}$$

۲) امپدانس انتقالی:

$$H(S)=\frac{V_2(S)}{I_1(S)}$$

۳) ادمیتانس انتقالی:

$$H(S)=\frac{I_2(S)}{V_1(S)}$$

۴) نسبت انتقال ولتاژ:

$$H(S)=\frac{V_2(S)}{V_1(S)}$$

۵) نسبت انتقال جریان:

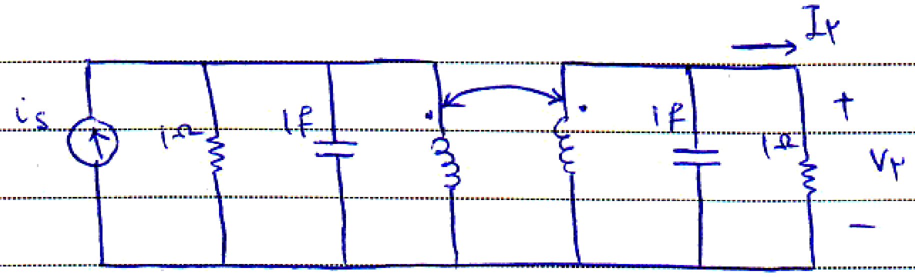
$$H(S)=\frac{I_2(S)}{I_1(S)}$$

گاهاً از ترکیب این توابع استفاده می‌کنیم

مثلاً $\dfrac{\left(\frac{I_1}{V_2}\right)}{\frac{V_1}{V_2}}=\dfrac{I_1}{V_1}$ ادمیتانس نقطه تحریک

مثال) در مدار زیر توابع شبکه زیر را حساب کنید

الف) امپدانس نقطه تحریک $\frac{V_1}{I_1}$ ب) امپدانس انتقالی $\frac{V_2}{I_1}$ ج) نسبت انتقال ولتاژ $\frac{V_2}{V_1}$




$$L=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

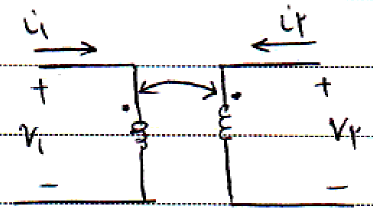
با توجه به ماهیت المان‌ها که به طور موازی اند از یکی از روش‌های گره یا کات ست استفاده می‌کنیم

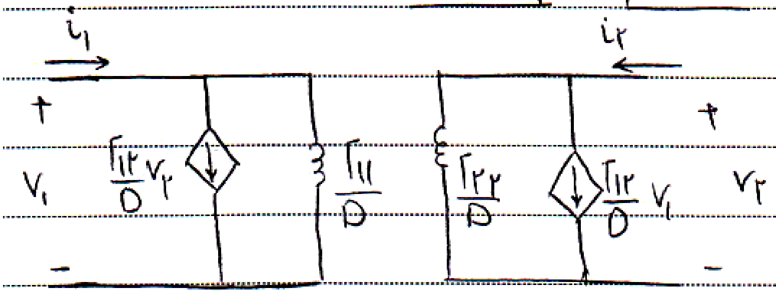
TABAN

از روش ماتریس گره ۲

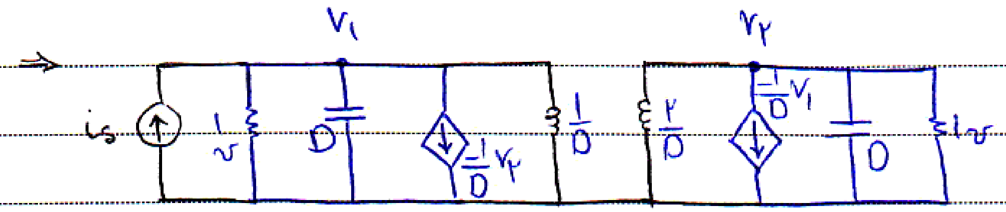
$$L=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow \Gamma=L^{-1}=\frac{1}{2-1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$




$\Rightarrow$




$$\begin{bmatrix}s+1/s+1 & 0\\ 0 & \frac{2}{s}+s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_s+\frac{1}{D}V_2\\ \frac{1}{D}V_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{s^2+s+1}{s} & \frac{-1}{s}\\ -1/s & \frac{s^2+s+2}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_s\\ 0\end{bmatrix}$$

$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}\qquad H_1(s)=\frac{V_2(s)}{I_s(s)}\qquad H_2(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{H_1(s)}{Z(s)}$$

$$V_1(s)=\frac{\frac{s^2+s+1}{s}\,I(s)}{\frac{(s^2+s+1)(s^2+s+2)}{s^2}-\frac{1}{s^2}}\Rightarrow \boxed{Z(s)=\frac{s(s^2+s+1)}{(s^2+s+1)(s^2+s+2)-1}}$$

$$V_2(s)=\frac{\frac{1}{s}I_s(s)}{\frac{(s^2+s+1)(s^2+s+2)}{s^2}-\frac{1}{s^2}} \Rightarrow H_1(s)=\frac{s}{(s^2+s+1)(s^2+s+2)-1}$$

$$H_2(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$$

۱۰- نمایش قطب و صفر

این یک روش برای تابع تبدیل توابع و رسم آن در صفحه مختلط مطرح می‌کنند

تابع $H(s)$ را در نظر بگیرید فرم کلی تابع تبدیل:

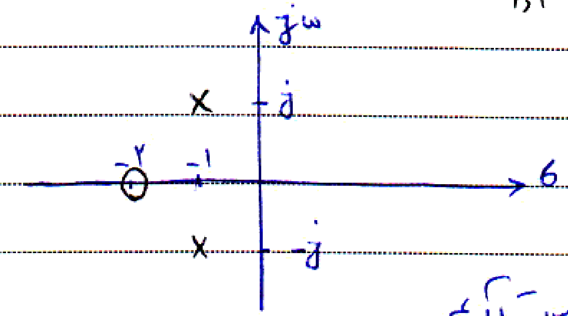
$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0} \qquad m\leq s \qquad m<n$$

در صفحه مختلط ($\sigma$ و $j\omega$) صفرهای تابع تبدیل را با علامت O و قطبها را با X نمایش می‌دهیم

برای شکل به دست آمده از نمایش قطب و صفر می‌نویسیم

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2} \quad \begin{cases} z_1=-2 \\ p_{1,2}=-1\pm j \end{cases}$$




از روی شکل می‌توانیم به تابع تبدیل برسیم ولی K را نمی‌توانیم به دست آوریم

برای به دست آوردن K باید در یک نقطه مشخص مقدار تابع تبدیل را داشته باشیم

$$H(j\omega) = \frac{K(2+j\omega)}{2-\omega^2+2j\omega}$$ فرض کنید $H(j0)=2$

$$H(j0) = \frac{2K}{2} = 2 \rightarrow K=2 \Rightarrow H(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+2s+2}$$

تابع شبکه در حالت دائمی سینوسی، ورودی Sin، Cos است

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$ ورودی به صورت ضربه و نمایی

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}} \qquad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \qquad Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)| \angle Y(j\omega) = |X(j\omega)| \angle X(j\omega) \times |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)| \angle Y(j\omega) = |X(j\omega)||H(j\omega)| \angle\angle X(j\omega) + \angle H(j\omega)$$

$$\cancel{X(j\omega)}\ x(t) = A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow X(j\omega) = A\angle\phi$$ در حوزه دائمی سینوسی

$$|Y(j\omega)| \angle Y(j\omega) = A|H(j\omega)| \angle\phi + \angle H(j\omega)$$

انتقال به رژیم سینوسی $\longrightarrow$ $y(t) = A|H(j\omega)| \cos(\omega t+\phi+\angle H(j\omega))$

مثال) فرض کنید: $y(t)=? \Leftarrow x(t) = \cos t\, u(t)$ ، $H(s) = \frac{s^2+4}{(s+2)(s^2+3s+4)}$

راه حل سخت:

$$X(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = X(s)H(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t+\theta) \Rightarrow X(j\omega) = A\angle\theta$$

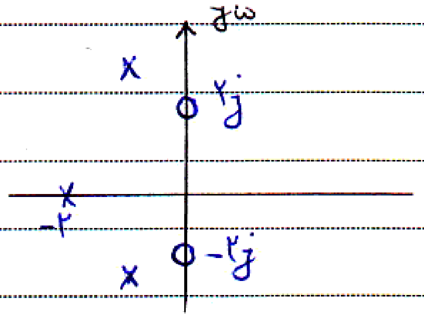
راه حل آسان: چون ورودی در سیستم سینوسی تک فرکانس است از تحلیل سینوسی حالت ماندگار استفاده می‌کنیم.

$\omega = 1$

$$H(j1) = \frac{4-1}{(2+j1)(4-1+3j\omega)} = \frac{3}{(2+j1)(3+3j\omega)} = \frac{1}{(2+j)(1+j)}$$

$$H(j1) = \frac{1}{1+3j} = \frac{1}{\sqrt{10}\,\angle 71.5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle -71.5^\circ$$

$$X(j1) = 1 \angle 0$$




$$Y(j1) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{10}} \angle\big(0 + (-71.5)\big) = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle -71.5^\circ$$

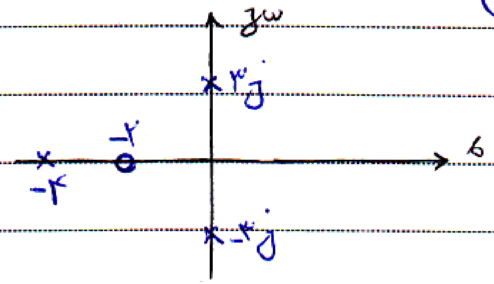
$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cos(t - 71.5^\circ)$$

تمرین) اگر $x(t) = \cos 2t \leftarrow y(t) = ?$

$$H(j\omega) = \frac{4-\omega^2}{(2+j\omega)(4-\omega^2+3j\omega)}$$

$$H(j2) = 0 \longrightarrow Y(j2) = 0 \longrightarrow y(t) = \cancel{X}\ 0$$

تمرین) $x(t) = \cos 3t \qquad H(s) = \dfrac{s+2}{(s^2+9)(s+4)} \qquad , y(t) = ?$




$$H(j\omega) = \frac{2+j\omega}{(9-\omega^2)(4+j\omega)} \longrightarrow H(j3) = \infty$$

$$\longrightarrow Y(j3) = \infty \longrightarrow y(t) = \infty$$

✓ اگر صفر تابع تبدیل روی محور $j\omega$ قرار داشته باشد، پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس صفر است

✓ اگر قطبی روی محور $j\omega$ قرار داشته باشد پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس بی‌نهایت است.

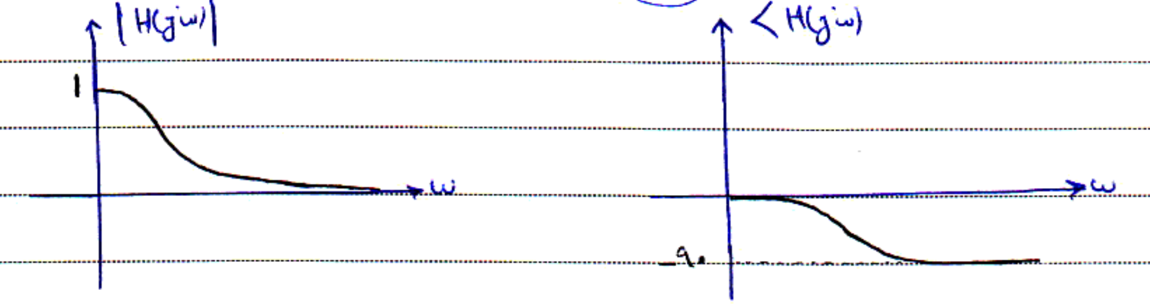
این حالت به معنای تحریک همزمان در فرکانس طبیعی است.

پاسخ فرکانسی: $H(j\omega)=|H(j\omega)|\angle H(j\omega)$

به اطلاعات بر حسب $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$، پاسخ فرکانسی می‌گوییم

مثال) $H(S)=\dfrac{1}{S+1}$

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}=\frac{\sqrt{1}\angle 0}{\sqrt{1+\omega^2}\angle tg^{-1}\omega}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}}_{|H(j\omega)|}\angle\underbrace{-tg^{-1}\omega}_{\angle H(j\omega)}$$




در این درس به دنبال $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$ در یک امکان مشخص هستیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) قطب‌ها و صفرهای تابع را معین می‌کنیم

$$H(S)=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(S-Z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(S-P_j)}$$

یعنی:

$$H(j\omega)=\frac{K(j\omega)\ \prod_{j=1}^{m}(j\omega-Z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(j\omega-P_j)}$$

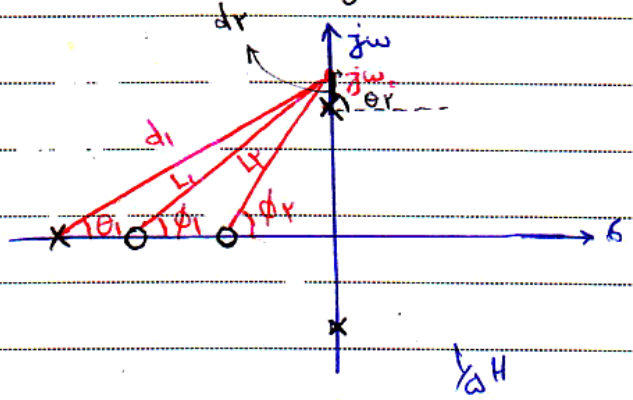
TABAN

$$|H(j\omega)| = |K(j\omega)| \cdot \sum_{j=1}^{m} |j\omega - z_j| \Big/ \sum_{j=1}^{n} |j\omega - p_j|$$

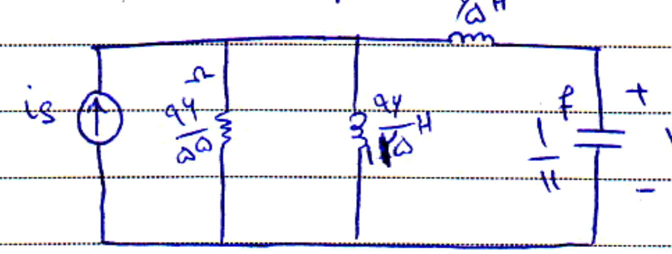
$$\angle H(j\omega) = \angle K(j\omega) + \sum_{j=1}^{m} \angle (j\omega - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \angle (j\omega - p_j)$$

۲) قطب‌ها و صفرها را در صفحه s مشخص می‌کنیم و از قطب‌ها و صفرها به نقطه $j\omega_0$ یعنی نقطه‌ای که می‌خواهیم اندازه و فاز را در آن بدست آوریم، خطوطی را رسم می‌کنیم. هرگاه اندازه بردارهایی که از صفرها رسم می‌شوند را با $L_1$ و $L_2$ ، ... ، $L_m$ و زوایای این بردارها را با محور حقیقی با $\phi_1$ ، $\phi_2$ و ... ، $\phi_m$ نشان دهیم و همچنین اندازه بردارهایی را که از قطب‌ها رسم می‌شوند با $d_1$ ، $d_2$ و ... ، $d_n$ نشان دهیم و زوایای این بردارها را با محور حقیقی با $\theta_1$ ، $\theta_2$ ، ... ، $\theta_n$ نشان دهیم ؛

$$|H(j\omega_0)| = \frac{|K(j\omega)| \prod_{j=1}^{m} L_j}{\prod_{j=1}^{n} d_j} \quad , \quad \angle H(j\omega_0) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j - \sum_{j=1}^{n} \theta_j$$




مثال) برای حل، چون $H(s)$ در حالت صفر محاسبه می‌شود پس شرایط اولیه نداریم.



الف) $H(S)=\dfrac{V_2(S)}{I_S(S)}$

ب) جریان منبع برابر: $i_s(t)=15\cos(4t-30)$ .

الف) حل از گره

$$\begin{bmatrix} \frac{55}{96}+\frac{125}{96s}+\frac{5}{s} & \frac{-5}{s} \\ \frac{-5}{s} & \frac{5}{s}+\frac{s}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_S(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{525+55s}{96s} & \frac{-5}{s} \\ \frac{-5}{s} & \frac{s^2+55}{11s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I(S) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2(S)=\frac{\frac{5}{s}I(S)}{\frac{(55s+525)(s^2+55)}{96\times 11 s^2}-\frac{25}{s^2}}$$

$$\frac{V_2(S)}{I_S(S)}=\frac{96s}{(s+5)(s^2+6s+25)}$$

$Z=0$

$P_1=-5$

$P_{2,3}=-3\pm 4j$

$I_S(j\omega)=15\angle -30 \Rightarrow I_S(j4)=15\angle -30$

$I_S(S)=15\angle -30 \qquad \omega_0=4$

ب) حل از طریق فازور:

$$H(j4)=\frac{96\times 4j}{(5+4j)(9+24j)}=2.22-0.727j=2.347\angle -18.13$$

$I_S(j4)=15\angle -30$

$$\longrightarrow V_2(j4)=2.347\times 15\ \angle -30-18.13 \Rightarrow V_2(j4)=35.04\angle -48.13$$

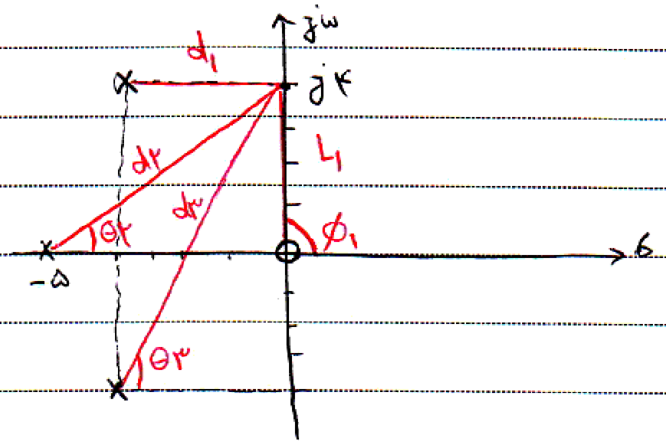
$\longrightarrow v_2(t) = ۳۵٫۰۴ \cos(۴t - ۴۸٫۱۳)$

حل از راه حل دوم: از ترسیمات قطب و صفر استفاده می‌کنیم

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{I_s(s)} = \frac{۹۶s}{(s+۵)(s^2+۶s+۲۵)}$$

$z \longrightarrow s = ۰$

$p \longrightarrow -۵ \,,\, -۳ \pm ۴j$




$\begin{cases} d_1 = ۳ \\ \theta_1 = ۰ \end{cases}$ $\begin{cases} d_2 = \sqrt{۵^2 + ۴^2} = ۶٫۴ \\ \theta_2 = tg^{-1} \frac{۴}{۵} = ۳۸٫۶۸ \end{cases}$ $\begin{cases} d_3 = \sqrt{۸^2 + ۳^2} = ۸٫۵۴ \\ \theta_3 = tg^{-1} \frac{۸}{۳} = ۶۹٫۵ \end{cases}$

$\begin{cases} L_1 = ۴ \\ \phi_1 = ۹۰ \end{cases}$ $|H(j۴)| = \frac{|k|\, L_1}{d_1 d_2 d_3} = \frac{۹۶ \times ۴}{۶٫۴ \times ۳ \times ۸٫۵۴} = ۲٫۳۴$

$\angle H(j۴) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \angle k = ۹۰ - ۳۸٫۶۸ - ۶۹٫۵ = -۱۸٫۱۸$

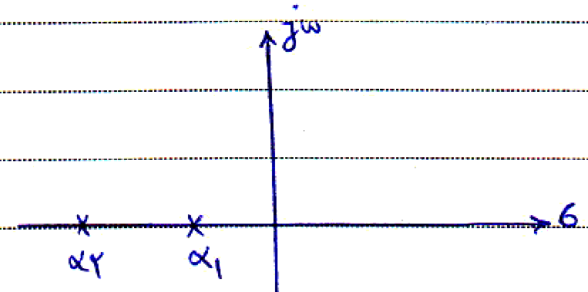
$H(j۴) = ۲٫۳۴ \angle -۱۸٫۱۸$

$V_2(j۴) = ۱۵ \angle -۳۰ \times ۲٫۳۴ \angle -۱۸٫۱۸ = ۳۵ \angle -۴۸٫۱۸$

$v_2(t) = ۳۵ \cos(۴t - ۴۸٫۱۸)$

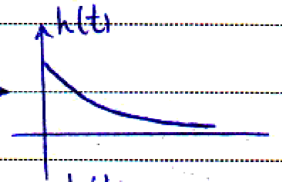
۵) بررسی قطب‌های تابع تبدیل:

الف) قطب‌های حقیقی:




$$H(S)=\frac{K_1}{S-\alpha_1}+\frac{K_2}{S-\alpha_2} \Rightarrow h(t)=K_1e^{\alpha_1 t}+K_2e^{\alpha_2 t}$$

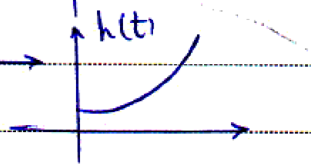
$\alpha_1<0 \,,\, \alpha_2<0 \longrightarrow$




تابع پایدار است.

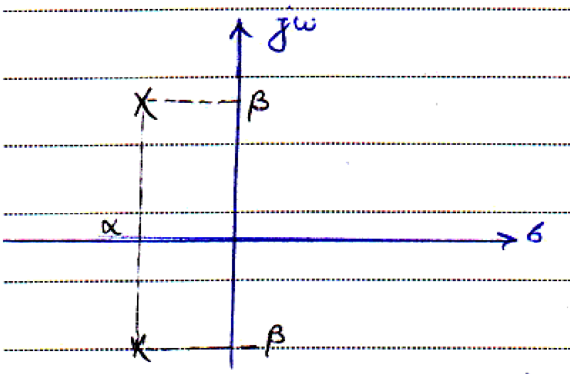
$\alpha_1>0$ یا $\alpha_2>0 \longrightarrow$

اگر یکی مثبت باشد.




ناپایدار

ب) قطب‌های مزدوج:



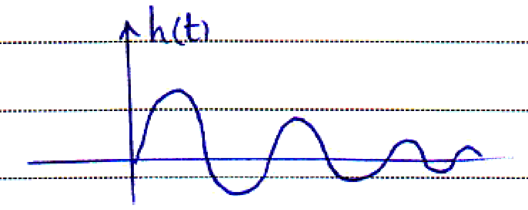

$$S_{1,2}=\alpha \pm j\omega$$

$$H(S)=\frac{K}{S-(\alpha+j\beta)}+\frac{K^*}{S-(\alpha-j\beta)}$$

$$h(t)=2|K|e^{\alpha t}\cos(\beta t+\angle K)$$

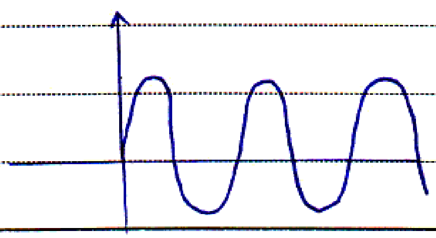
$\alpha$ به صورت میرایی بوده و $\beta$ فرکانس نوسان می‌باشد.

$\alpha<0$



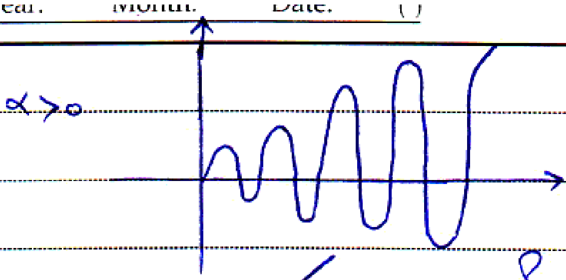

قطب‌ها سمت چپ محور $j\omega$ ← وضعیت پایدار

$\alpha=0$



قطب‌ها روی محور ← وضعیت مرز پایدار

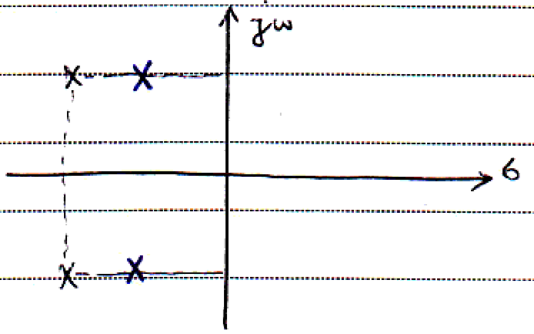
(در عمل امکان‌پذیر نیست)

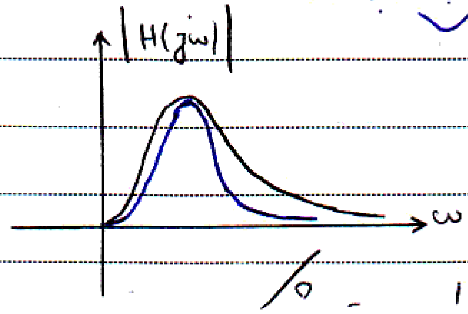



قطب‌ها سمت راست ← وضعیت ناپایدار

✓ بر خلاف قطب‌های حقیقی جفت مزدوج اگر سمت راست محور نیز باشند ایجاد ناپایداری می‌کنند

✓ وجود قطب مزدوج (مختلط) در پاسخ فرکانسی تابع شبکه ایجاد پیک‌ها و نوسان‌ها می‌نمایند هر چه این قطب‌ها از محور دورتر باشند پهنای باند بزرگتر است




فرکانس‌های طبیعی و قطب‌های تابع شبکه:

فرکانس‌های طبیعی را از یکی از روش‌های زیر بدست می‌آوریم:

$|Y_n(s)| = 0$

یا

$|Z_m(s)| = 0$

یا

$|Z_B(s)| = 0$

یا

$|Y_Q(s)| = 0$

دلیل مهم این است که هر قطب تابع شبکه فرکانس طبیعی شبکه نیز هست (اما ممکن است یک فرکانس طبیعی شبکه قطب تابع شبکه نباشد.

خاصیت تقارن در تابع سیستم:

فرم کلی تابع سیستم:

$$H(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \qquad m\leq n$$

در حوزه فرکانس $\quad s \longrightarrow j\omega$

$$(j\omega)^2=-\omega^2 \qquad (j\omega)=j\omega$$

$$(j\omega)^4=\omega^4 \qquad (j\omega)^3=-j\omega^3$$

$$(j\omega)^6=-\omega^6=(j\omega)^4\times(j\omega)^2 \qquad (j\omega)^5=j\omega^5=(j\omega)^3\times(j\omega)^2$$

$$(j\omega)^8=\omega^8=(j\omega)^6\times(j\omega)^2 \qquad (j\omega)^7=-j\omega^7$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$H(j\omega)=\frac{(b_0-b_2\omega^2+b_4\omega^4-\ldots)+j\omega(b_1-b_3\omega^2+b_5\omega^4-\ldots)}{(a_0-a_2\omega^2-a_4\omega^4-\ldots)+j\omega(a_1-a_3\omega^2+a_5\omega^4-\ldots)}$$

$$H(j\omega)=\frac{(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)+j\omega(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)}{(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)+j\omega(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)}$$

$$\begin{cases}|H(j\omega)|=|H(-j\omega)|\\ Re[H(j\omega)]=Re[H(-j\omega)]\end{cases} \qquad \begin{cases}\angle H(j\omega)=-\angle H(-j\omega)\\ Im[H(j\omega)]=-Im[H(-j\omega)]\end{cases}$$

مثال) اطلاعات زیر از یک تابع سیستم داده شده، حداقل تعداد قطب و صفرها چیست؟

$$|H(j0)|=1$$

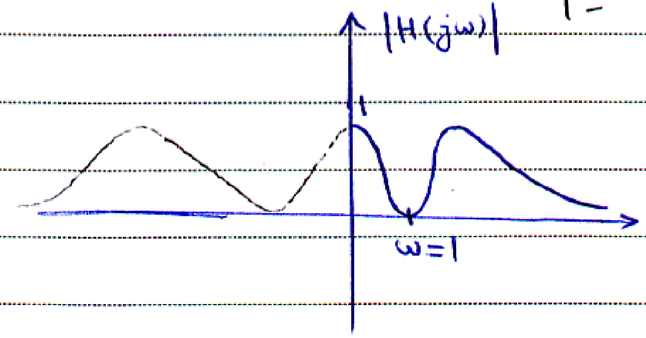
$$|H(j1)|=0 \qquad |H(j\infty)|=0$$

با توجه به خاصیت تقارن ، $|H(-j1)|=0$

پس دو صفر حاصل داریم $S=j$ ، $S=-j$

با توجه به اینکه $|H(j\infty)|=0$ یعنی درجه مخرج از درجه صورت حداقل یکی بالاتر است یعنی حداقل ۳ قطب داریم. حتماً یکی از قطب ها حقیقی است و ممکن است دو قطب دیگر مزدوج باشند

$$H(S)=\frac{(S-j)(S+j)=(S^2+1)}{(S-\gamma)(S-(\alpha+j\beta))(S-(\alpha-j\beta))}$$



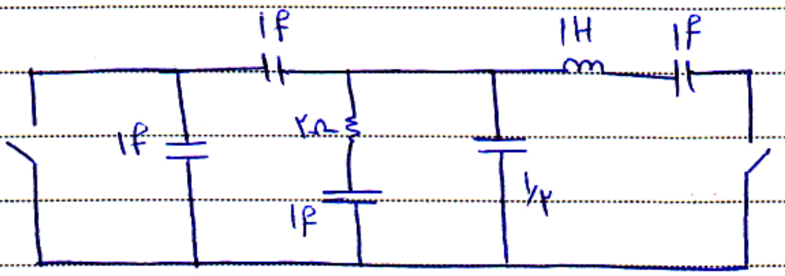
A) در مدار شکل زیر در دو حالت باز بودن کلیدها و بسته بودن کلیدها کدام گزینه صحیح است؟

۱) تعداد فرکانس های طبیعی در هر دو حالت ۵ است.

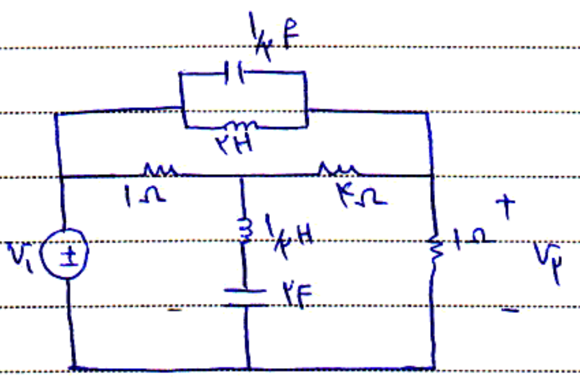
۲) تعداد فرکانس های طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر ۱ است.

۳) تعداد فرکانس های طبیعی صفر در یک حالت برابر تعداد فرکانس های طبیعی غیر صفر در حالت دیگر است.

۴) موارد ۲ و ۳.




B) در مدار زیر تابع شبکه $\frac{V_2}{V_1}$ کدام است؟




1) $\frac{2(s^2+1)}{(s+1)^2}$

2) $\frac{s^2+1}{(s+2)^2}$

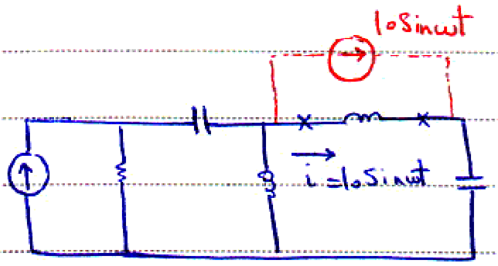
3) $\frac{s^2+1}{s^2+s+1}$

4) $\frac{s^2+1}{(s+1)^2}$

## «فضای شبکه»

**قضیه جانشینی :** کاربرد در شبکه‌های خطی، غیرخطی، تغییرپذیر و تغییرناپذیر با زمان

**قضیه :** هرگاه در شبکه N با مشخصات داده شده، عنصری یا شاخه‌ای مانند k که تزویجی با سایر عناصر شبکه ندارد در نظر بگیریم، جایی که ولتاژ این شاخه برابر با $v_k(t)$ و جریانش برابر با $j_k(t)$ بوده و معادله تغییراتش مشخص باشد می‌توان به جای شاخه k، منبع ولتاژی که معادله تغییراتش برابر با $v_k(t)$ یا منبع جریانی که معادله تغییراتش برابر با $j_k(t)$ باشد قرار داد.



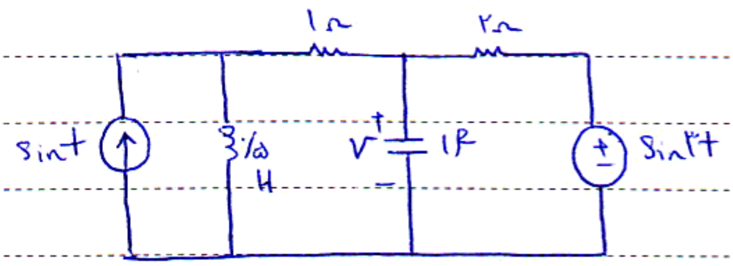

**قضیه جمع آثار :** کاربرد در شبکه‌های خطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان)

هرگاه شبکه N با مشخصات داده شده، فرض باشد اگر شبکه توسط تعدادی منبع مستقل تحریک شود، پاسخ حالت صفر شبکه برابر است با جمع جبری پاسخ‌های حالت صفر ناشی از اعمال هر یک از منابع مستقل در صورتی که به تنهایی بر شبکه اعمال شوند.

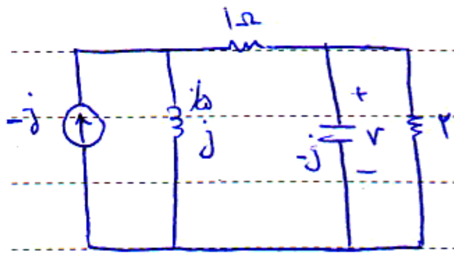
**تعمیم فرعی :** هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی باشد، پاسخ حالت صفر (پاسخ حالت دائمی) ناشی از اعمال یک تعداد منابع سینوسی مستقل (حتی با فرکانس‌های متفاوت) برابر است با ،

مجموع جبری پاسخ‌های دائمی سینوسی ناشی از اعمال هر یک از منابع وقتی به تنهایی به شبکه اعمال می‌شوند.

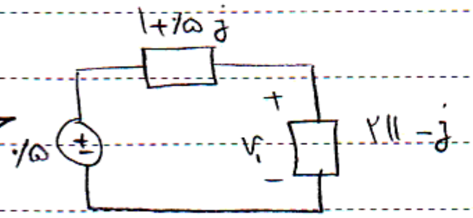
مثال: $v(t)$ را در مدار زیر بدست آورید؟

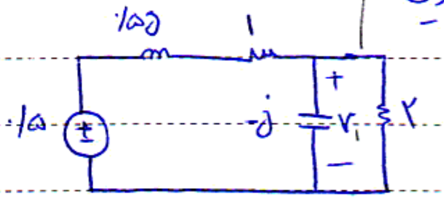



حل: از جمع آثار استفاده می‌کنیم و از تحلیل سینوسی حالت ماندگار.




$\omega = 1$



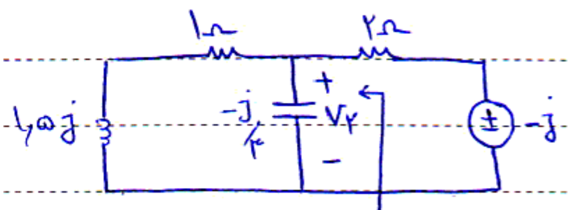




$V_1$ ناشی از منبع جریان

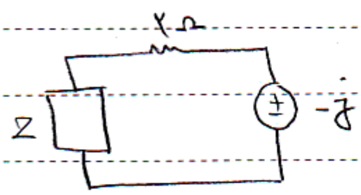
$$V_1 = \frac{(2 \| -j)}{0.5j + 1 + (2 \| -j)} \times 0.5 = \frac{0.4 - 0.8j}{0.5j + 1 + 0.4 - 0.8j} \times 0.5$$

$$V_1 = \frac{8}{41} - \frac{10}{41} j = 0.31 \angle -51.34$$

$$\Rightarrow v_1(t) = 0.31 \cos(t - 51.34)$$




$\omega = 3$




$$Z = (1 + 1.5j) \| (-j/3) = 0.047 - 0.388j$$

$V_2$ ناشی از منبع ولتاژ

$$V_2 = -j \times \frac{(0.047 - 0.388j)}{2 + (0.047 - 0.388j)} = -0.178 - 0.0598j = 0.187 \angle 197.7$$

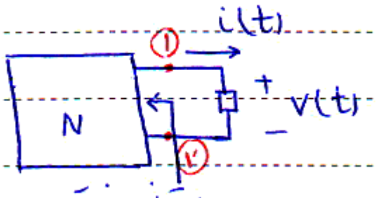
$v_2(t) = 0/187 \cos(3t + 197/7)$

چون فرکانس‌ها متفاوت‌اند مجموع در حوزه زمان آن‌ها را با هم جمع کنیم.  $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$

$v(t) = 0/31 \cos(t - 51/34) + 0/187 \cos(3t + 197/7)$

قضیه مدارهای معادل تونن و نورتن : کاربرد در شبکه‌های خطی تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان

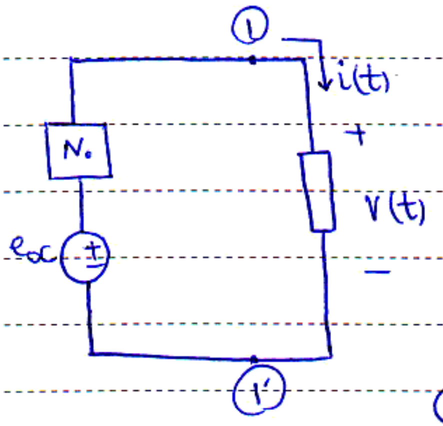
براساس این قضیه اگر شبکه N را با یک شبکه معادل تونن یا نورتن تعویض کنیم هیچ‌گونه تغییری در شکل موج جریان (یعنی $i(t)$) و شکل موج ولتاژ (یعنی $v(t)$) در مدار بیرونی شبکه حاصل نمی‌شود.



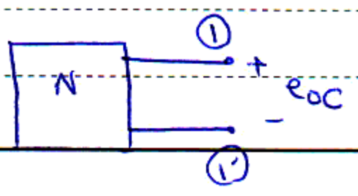

معادل تونن یا نورتن

شرط این است که بار هیچ‌گونه کوپلینگی با سایر عناصر شبکه نداشته باشد.

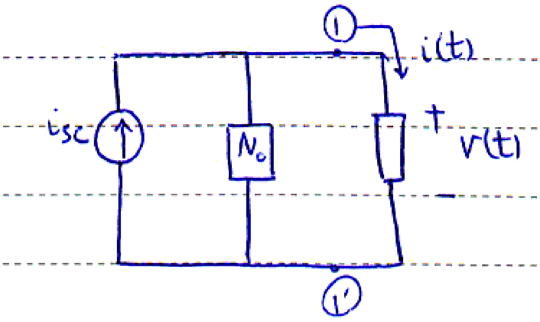
تفسیر شبکه معادل تونن: هر شبکه با مشخصات موجود را می‌توان با شبکه زیر معادل کرد که در آن شبکه $N_0$ شبکه در حالت استراحت یا شبکه معادل ورودی صفر و حالت صفر شبکه اولیه است.

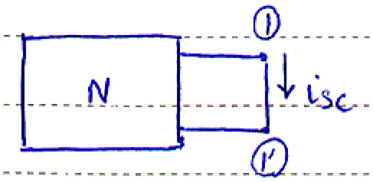



منبع ولتاژ $e_{oc}$، ولتاژ مدار باز دو سر ① و ①' است که به وسیله منابع مستقل شبکه و شرایط اولیه به وجود می‌آید.

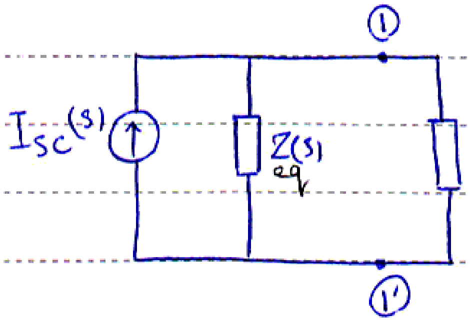


تصویر شبکه معادل نورتن: هر شبکه با مشخصات فوق را می‌توان با شبکه زیر معادل کرد که در آن شبکه $N_0$ شبکه N حالت قبل است و $I_{sc}$ جریان اتصال کوتاه دو سر (۱ ۱') ناشی از منابع مدار و شرایط اولیه آن است

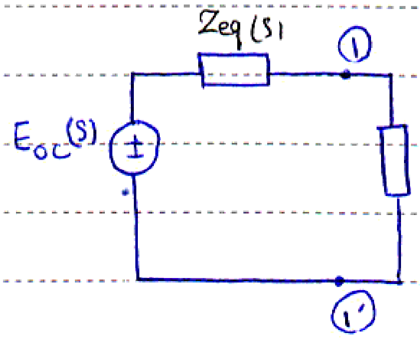



تصویر نورتن: هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان باشد می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده نمود و مدارهای معادل تونن و نورتن را به صورت زیر حاصل کرد



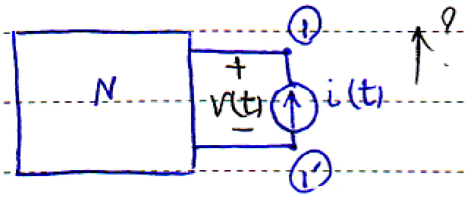

$$Z_{eq}(s) = \frac{E_{oc}(s)}{I_{sc}(s)}$$




روش‌های به دست آوردن $Z_{eq}(s)$:

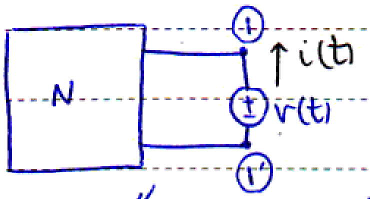
۱) روش اعمال منبع: یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) یک منبع جریان i(t) به دو سر ۱ ۱' اعمال می‌کنیم و ولتاژ دو سر آن را مانند شکل زیر به دست می‌آوریم



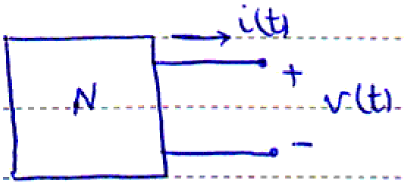

$$Z_{eq} = \frac{v(t)}{i(t)}$$

ب) یک منبع ولتاژ $v(t)$ به دو سر آن اعمال می‌کنیم و جریان آن را مانند شکل زیر به دست می‌آوریم.



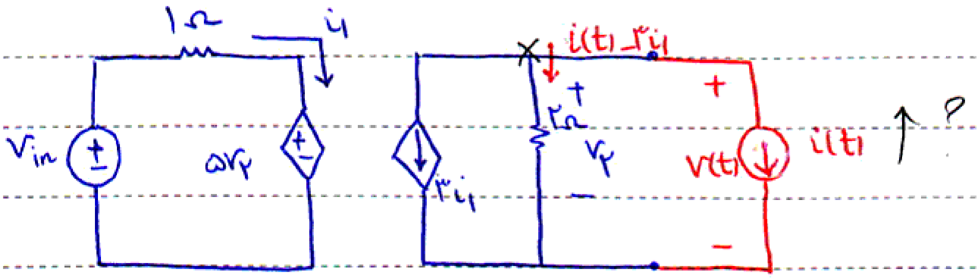

$$Z_{eq} = \frac{v(t)}{i(t)}$$

۲) معادله ولتاژ و جریان دو سر ۱ و ۱' را به صورت زیر به دست می‌آوریم. ($e_{oc}$ و $i_{sc}$ را جداگانه به دست می‌آوریم.)




$$v(t) = e_{oc} - Z_{eq}\, i(t)$$

مثال: معادل تونن از دو سر ۱ و ۱'




حل: از طریق روش اعمال منبع: منبع جریان اعمال می‌کنیم.

$$v_2 = v(t) = 2(i(t) - 3i_1)$$

$$\boxed{v(t) = 2i(t) - 6i_1} \quad (1)$$

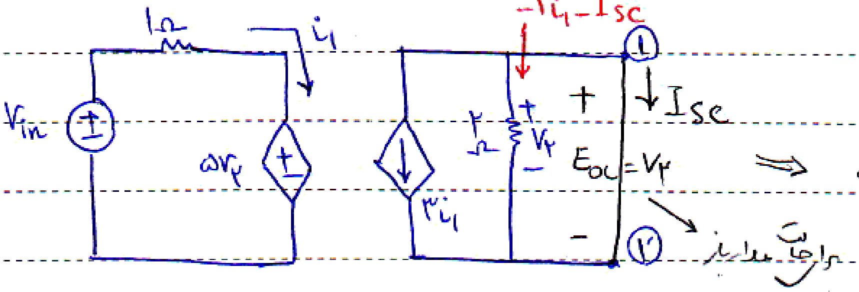
$$KVL: \; V_{in} = i_1 + 5v(t) \longrightarrow \boxed{i_1 = V_{in} - 5v(t)} \quad (2)$$

(1) و (2): $v(t) = 2i(t) - 6V_{in} + 30v(t) \Rightarrow 29v(t) = 6V_{in} - 2i(t)$

$$v(t)=\underbrace{\frac{6}{29}V_{in}}_{E_{oc}}\ \cancel{+}-\underbrace{\frac{2}{29}}_{Z_{eq}}i(t)$$

حل از طریق به دست آوردن معادل :

(روش دوم)




در حالت اتصال کوتاه

در حالت مدار باز

$$V_2=-2\times 3i_1=-6i_1 \qquad i_1=\frac{V_{in}-5V_2}{1}=V_{in}-5(-6i_1)$$

$$V_2=e_{oc}$$

$$i_1=V_{in}+30i_1 \longrightarrow i_1=\frac{-V_{in}}{29} \qquad V_2=\frac{6}{29}V_{in} \longrightarrow E_{oc}=\frac{6}{29}V_{in}$$

$$V_2=0 \longrightarrow 2(-3i_1-I_{sc})=0 \Rightarrow -6i_1-2I_{sc}=0 \longrightarrow \boxed{I_{sc}=-3i_1}$$

$$KVL:\ i_1=V_{in}-\cancel{5V_2}^{\,0} \Rightarrow i_1=V_{in} \longrightarrow \boxed{I_{sc}=-3V_{in}}$$

$$Z_{eq}=\frac{E_{oc}}{I_{sc}}=\frac{6/29}{-3}=\frac{-2}{29}$$

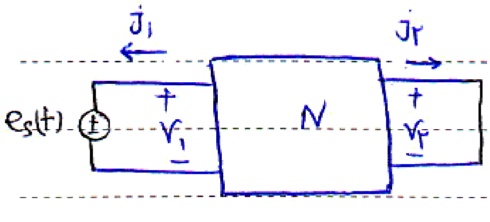
قضیه هم پاسخی : کاربرد در شبکه های خطی تغییرناپذیر با زمان، بدون منابع وابسته و مستقل و بدون عنصری

بجز ژیراتور و شرایط اولیه صفر . این قضیه سه نوع بیان دارد :

بیان ۱) خطوط به شبکه N با مشخصات ذکر شده در ترکیبات الف و ب منابع زیر را اعمال کنیم خواهیم داشت :

$$j_2(t)=\hat{j}_1(t)$$

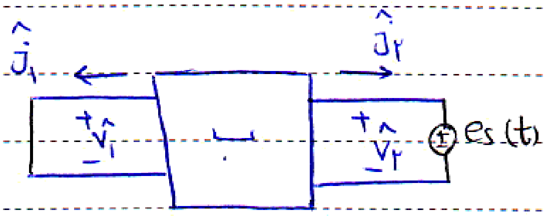
طبق قضیه‌ی تلگان:




(الف)

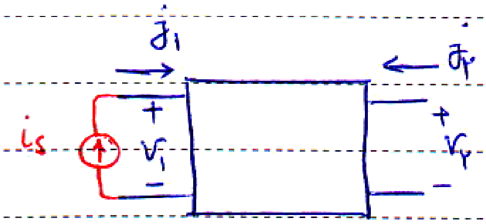
$$\underbrace{v_1}_{e_s}\hat{j}_1 + \underbrace{v_2}_{0}\hat{j}_2 = \hat{v}_1 \underbrace{j_1}_{0} + \underbrace{\hat{v}_2}_{e_s} j_2$$

$$e_s \hat{j}_1 = e_s j_2 \longrightarrow \hat{j}_1 = j_2$$

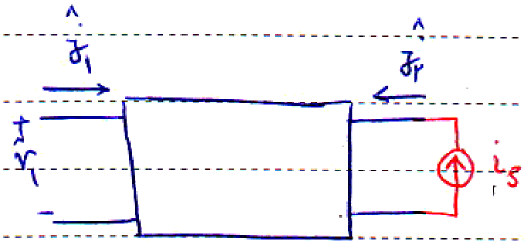



(ب)

مثال ۲)



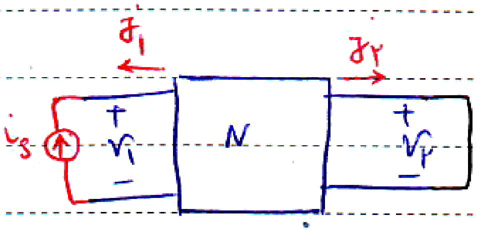

طبق قضیه‌ی تلگان:




$$v_1 \underbrace{\hat{j}_1}_{0} + v_2 \underbrace{\hat{j}_2}_{i_s} = \hat{v}_1 \underbrace{j_1}_{i_s} + \hat{v}_2 \underbrace{j_2}_{0}$$

$$v_2 i_s = \hat{v}_1 i_s \longrightarrow v_2 = \hat{v}_1$$

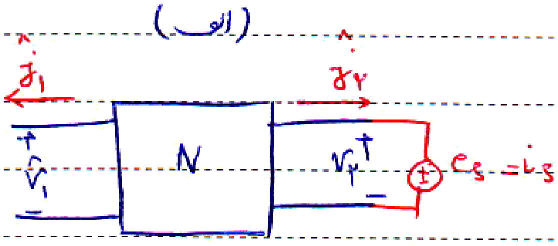
مثال سوم: با استفاده از قضیه‌ی تلگان می‌توان نشان داد:




(الف)

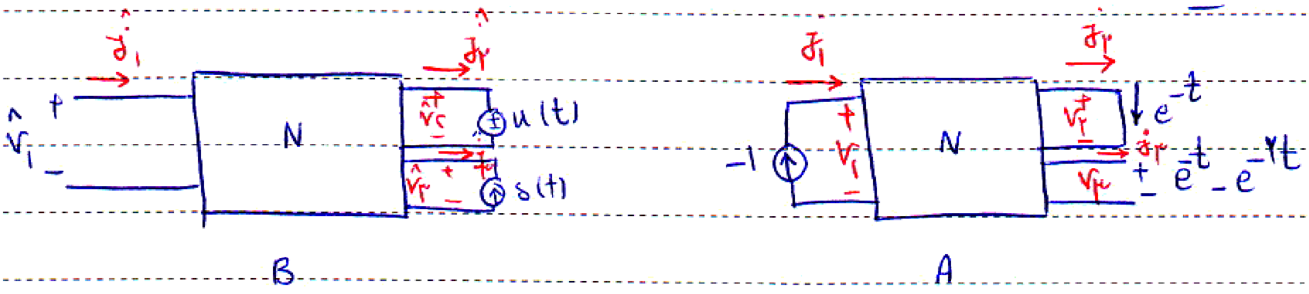
$$v_1 \underbrace{\hat{j}_1}_{0} + \underbrace{v_2}_{0} \hat{j}_2 = \hat{v}_1 \underbrace{j_1}_{-i_s} + \underbrace{\hat{v}_2}_{e_s} j_2$$

$$-\hat{v}_1 i_s + i_s j_2 = 0 \longrightarrow \hat{v}_1 = j_2$$




(ب)

مثال) در مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان شکل A، اطلاعات زیر داده شده. اگر مدار را به صورت B درنظر بگیریم، ولتاژ $\hat{v}_1$ چیست؟




چون تصویر هم پاسخی تحت شرایط خطی و تغییر ناپذیر بودن با زمان است می‌توان از آن قضیه‌ی تلگان را در حوزه‌ی لاپلاس بکار برد.

$$v_1\hat{j}_1+v_2\hat{j}_2+v_3\hat{j}_3=\hat{v}_1 j_1+\hat{v}_2 j_2+\hat{v}_3 j_3$$

$$0+0+\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)\times(-1)=\hat{v}_1\left(-\frac{1}{s}\right)+\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)+0$$

$$\frac{-1}{(s+1)(s+2)}=\hat{v}_1\times\frac{-1}{s}+\frac{1}{s(s+1)}$$

$$\frac{\hat{v}_1}{s}=\frac{1}{s(s+1)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+2+s}{s(s+1)(s+2)}$$

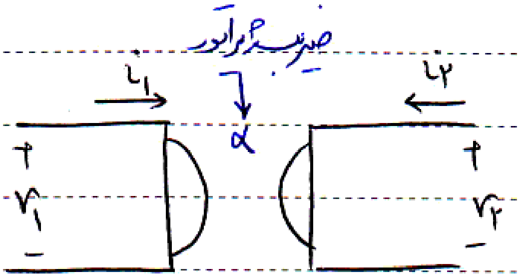
$$\hat{v}_1=\frac{2}{s+2}\longrightarrow\hat{v}_1(t)=2e^{-2t}u(t)$$

زیرابو؟

تعریف: هر شبکه‌ای که در قضیه‌ی هم پاسخی صدق کند شبکه‌ی متقابل گفته می‌شود.

$$\begin{cases}Z_{ij}=Z_{ji}\\ Y_{ij}=Y_{ji}\end{cases}$$

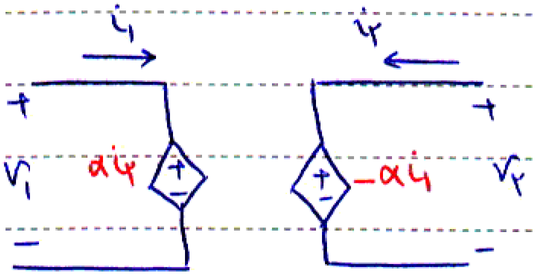
ژیراتور: یک عنصر غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان است.




$$\begin{cases} V_1 = \alpha i_2 \\ V_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_2 = \dfrac{1}{\alpha} V_1 \\ i_1 = \dfrac{-1}{\alpha} V_2 \end{cases}$$

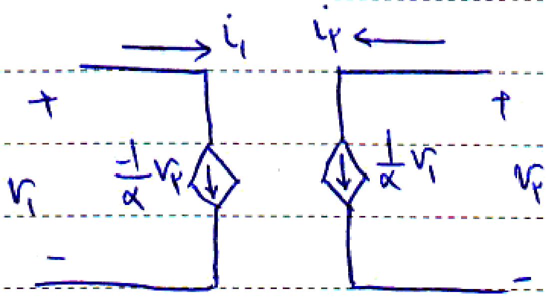
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی ژیراتور با ماتریس‌های مش و حلقه‌های اساسی:




$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\alpha} \\ 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی ژیراتور با ماتریس‌های گره و کات‌ست اساسی:

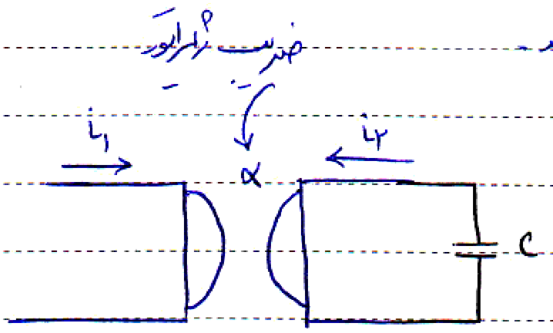



در ژیراتور:

$$V_1 i_1 + V_2 i_2 = \alpha i_2 i_1 - \alpha i_2 i_1 = 0$$

مفهوم این رابطه این است که ژیراتور به شبکه توان نمی‌دهد.

مثال) عملکرد مدار زیر را مشخص کنید؟



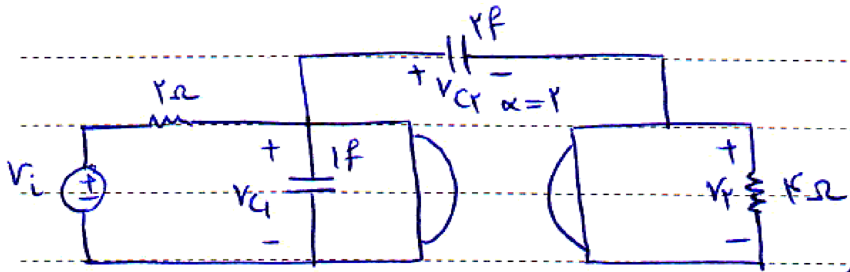

$$\begin{cases} V_1 = \alpha i_2 \\ V_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow -i_2 = C\frac{dV_2}{dt}$$

$$\longrightarrow i_2 = -C\frac{dV_2}{dt}$$

$$\begin{cases} V_1 = \alpha i_2 = -\alpha C\frac{dV_2}{dt} \\ V_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow V_1 = -\alpha C\frac{d}{dt}\left(-\alpha i_1\right)$$

$$\longrightarrow V_1 = \underbrace{\alpha^2 C}_{L}\frac{di_1}{dt}$$

مثال) در مدار زیر:



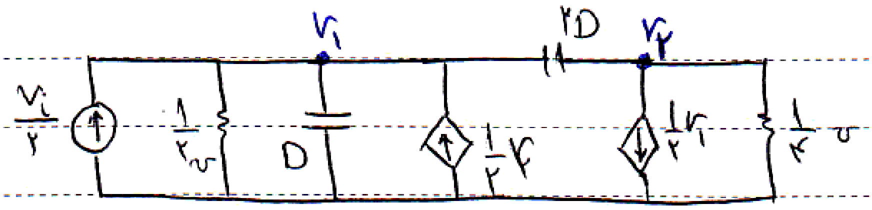

الف) فرکانس‌های طبیعی سیستم را بیابید؟

ب) تابع شبکه $\frac{V_o}{V_i}$ را بیابید؟

ج) اگر $V_i = 2\,\sin(t - 40)$ باشد، $V_o(t)$ را بیابید؟

(از روش ابرگره استفاده می‌کنیم.)

NADERI




$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+3D & -\frac{1}{2}-2D \\ -2D+\frac{1}{2} & 2D+\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+\cancel{\frac{1}{2}V_2} \\ \cancel{-\frac{1}{2}V_1} \end{bmatrix}$$

$2V_{C_2}(0^-)+V_{C_1}(0^-)$

$$\begin{bmatrix} 3s+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-2s \\ -2s+\frac{1}{2} & 2s+\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+3V_1(0^-)-2V_2(0^-) \\ -2V_1(0^-)+2V_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$-2V_{C_2}(0^-)$

$V_1(0^-)-V_2(0^-)=V_{C_2}(0^-) \qquad V_1(0^-)=V_{C_1}(0^-)$

شرایط اولیه؟

$$\begin{bmatrix} \frac{6s+1}{2} & -\frac{4s+1}{2} \\ -\frac{4s-1}{2} & \frac{8s+1}{4} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

فرکانس های طبیعی

$$\frac{(6s+1)(8s+1)}{8}-\frac{(4s+1)(4s-1)}{4}=0$$

$$(6s+1)(8s+1)-2(4s+1)(4s-1)=0$$

$$48s^2+14s+1-16s^2+2=0 \longrightarrow 32s^2+14s+3=0 \begin{cases} s_1= \\ s_2= \end{cases}$$

برای بدست آوردن تابع شبکه، شرایط اولیه را صفر می‌کنیم